

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA DE  
CALCULO NUMERICO  
PARTE B

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

**Pregunta 1**

$$\text{Sea : } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se desea resolver usando el siguiente método iterativo:

$$x^{(K+1)} = (D-U)^{-1} L * x^{(K)} + (D-U)^{-1} b$$

$$A = D - L - U$$

Demuestre sin realizar iteraciones si habrá convergencia o no.

**Solución**

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T) = 0.5 < 1$$

Por lo tanto habrá convergencia!!

**Pregunta 2**

Dada la matriz definida positiva  $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & c & q \end{pmatrix}$ . Probar que los métodos de Jacobi y de

Gauss-Seidel convergen o divergen exactamente para los mismos valores de  $b$  y  $c$

**Solución**

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b/2 & 0 & -c/2 \\ 0 & -c/q & 0 \end{bmatrix} \quad \rho(T_j) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \sqrt{c^2 + b^2 q}$$

$$Tg = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & b^2/2 & -c/2 \\ 0 & -b^2c/2q & c^2/2q \end{bmatrix} \quad \rho(Tg) = \frac{c^2 + b^2q}{2q}$$

$$\rho(Tg) = [\rho(Tj)]^2$$

$$\rho(Tg) < \rho(Tj) < 1$$

$$\text{o } \rho(Tg) \geq \rho(Tj) \geq 1$$

Ambos métodos convergen o divergen simultáneamente

### Pregunta 3

$$\text{Sea: } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Escriba un programa en MATLAB que obtenga el  $w$  óptimo y obtenga el vector solución usando el método SOR partiendo de  $(0,0)^T$  con una precisión de 0.0001.

### Solución

```
A=[1 2;-2 1]
b=[-1 3]'
D=diag(diag(A))
L=D-tril(A)
U=D-triu(A)
Tj=inv(D)*(L+U)
Rhoj=max(abs(eig(Tj)))
w=2/(1+sqrt(1-Rhoj^2))
Tw=inv(D-w*L)*((1-w)*D+w*U)
Cw= inv(D-w*L)*w*b
X=zeros(size(b))
for i=1:100
    XN=Tw*X+Cw;
    Err=norm(XN-X,2);
    X=XN;
    if Err<0.0001
        break
    end
end
```

### Pregunta 4

$$\text{Sea: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga el valor propio inferior usando el método de la potencia inversa partiendo de  $x^{(0)}=[1 \ 1]^T$ , realice 04 iteraciones y estime el error.

### Solución

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_1 = 1 \quad x_1 = \frac{y_1}{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{u_1} = 1$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = 1 \quad x_2 = \frac{y_2}{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{u_2} = 1$$

$$y_3 = Bx_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_3 = 3 \quad x_3 = \frac{y_3}{u_3} = \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{u_3} = 0.3333$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ -2.3333 \end{bmatrix} \quad u_4 = -2.3333 \quad x_4 = \frac{y_4}{u_4} = \begin{bmatrix} -0.7143 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = \frac{1}{u_4} = -0.4286$$

$$\varepsilon_4 \approx \|x_4 - x_3\|_{\infty} = 0.0476$$

### Pregunta 5

$$\text{Sea: } A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

Para que valores de  $a$  dicha matriz no es diagonalizable.  $a$  Real o Complejo?

### Solución

Cuando todos los valores propios son diferentes la diagonalización está garantizada, en este caso para que la matriz no sea diagonalizable debemos tener un valor propio con multiplicidad 2.

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - a^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - a^2$$

Para raíces iguales el discriminante debe ser nulo.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2 - a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{i}{2}$$

$$P(\lambda) = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$m_a\left(\lambda = \frac{3}{2}\right) = 2$$

$$m_g\left(\lambda = \frac{3}{2}\right) = 1$$

Dado que  $m_a \neq m_g$ , se verifica que la matriz no es diagonalizable.

### Pregunta 6

Averiguar si la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  es diagonalizable, justifique.

### Solución

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

$$ma(\lambda = 0) = 2 \quad mg(\lambda = 0) = 3 - \text{rango}(A) = 3 - 1 = 2$$

$$ma(\lambda = 3) = 1 \quad mg(\lambda = 3) = 3 - \text{rango}(A - 3I) = 3 - 2 = 1$$

Dado que  $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i) \quad \forall i$ , la matriz es diagonalizable.

### Pregunta 7

Escriba la función *localiza* que permite ubicar intervalos que contengan raíces de una función '*fun*' en el intervalo *[a,b]* con '*n*' particiones iguales y debe retornar una matriz de  $m \times 2$ , con los '*m*' intervalos que contienen las raíces.

*función z=localiza(fun,a,b,n)*

Ejm.  $a=-5 \quad b=5 \quad n=10 \quad z = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

### Solución

*función z=localiza(fun,a,b,n)*

$z=[];$

$x=a:(b-a)/n:b;$

$y=\text{feval}(\text{fun},x);$

for  $i=1:\text{length}(x)-1$

    if  $y(i)*y(i+1)<0$

$z=[z; x(i) \ x(i+1)];$

    end

end

### Pregunta 8

Dada la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , demostrar, mediante algún método de localización, que

$\lambda = 13$  no es valor propio.

### Solución

Por Gershegorin:

$$|z - 1| \leq |2| + |3| = 5$$

$$|z - 3| \leq |2| + |4| = 6$$

$$|z - 5| \leq |3| + |4| = 7$$

Dado que la matriz es simétrica,  $z$  es real,

$$-4 \leq z \leq 12$$

Por lo tanto  $\lambda = 13$  no puede ser un valor propio.

### Pregunta 9

El método de Newton para resolver cierta ecuación  $f(x) = 0$  viene dado por

$$\begin{cases} x_0 & \text{arbitrario} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1} & n \geq 0 \end{cases}$$

Determinar la función  $f(x) = 0$

### Solución

$$f(x) = x^2 - x$$

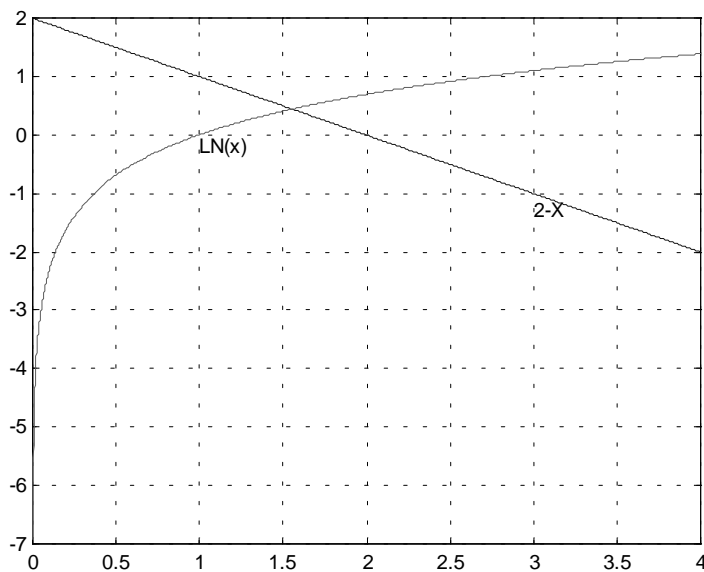
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1}$$

### Pregunta 10

Dada la función  $f(x) = x - 2 + \ln x$

- Localizar gráficamente las raíces de ecuación
- Realizar una iteración utilizando el método de Newton tomando  $x_0 = 1.5$

### Solución



$$f(x) = x - 2 + \ln(x)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 1.5567$$

**Los Profesores**