

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4 Y CALCULADORA
 - ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS
 - PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA
 - DURACION: 110 MINUTOS
-

Problema 1

Luis y Victor son dos jóvenes ingenieros UNI que gustan de invertir en acciones de la Bolsa de Valores de Lima (BVL), entre ellos se entabla el siguiente diálogo:

Víctor: He comprado acciones de San Cristóbal, Buena Ventura y Backus

Luis: ¿Qué cantidad tienes de cada una de ellas?

Víctor: ¡Adivina!

Luis: Dime el valor total de tus acciones en tres días diferentes y te diré cuantas tienes de cada una de ellas.

Víctor: El martes 22 de Noviembre de 2011 a precio de cierre las acciones valían 13890, el 28 de Noviembre valían 13122 y el 5 de Diciembre 12128 soles.

Luis conoce la siguiente información:

El 22 de Noviembre el precio de San Cristóbal, Buena Ventura, y Backus era respectivamente 16.98, 9.0, 9.0; el 28 de Noviembre 15.90, 8.72, 8.52 y el 5 de Diciembre 14.08, 8.20, 8.76.

¿Qué cantidad de acciones de cada tipo tiene Víctor?

- (1.0 pto) Plantee el sistema a solucionar.
- (3.0 ptos) Resuelva por el método iterativo de Gauss-Seidel, comenzando con el vector inicial [450 280 280]. Presente las primeras cuatro iteraciones.
- (1.0 pto) ¿Qué método es el que implementa el siguiente Script de MATLAB®?

```
function X = Pregunta(A,B,X0)
% DATOS:
% A es una matriz invertible de orden NxN
% B es una matriz de orden Nx1
% X0 es una matriz de orden Nx1: solucion inicial
% delta es la tolerancia para X0
% kmax es el número máximo de iteraciones
% Resultados
% X es una matriz de orden Nx1: La aproximacion a la solucion de AX = B
delta = 0.0001;
kmax = 100;
N = length(B);
for k = 1: kmax
    for j = 1:N
        X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*X0([1:j-1,j+1:N]))/A(j,j);
    end
    err=abs(norm(X'-X0));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    X0 = X';
    if (err<delta)|(relerr<delta)
        break
    end
end
X = X'
```

Solución:

a)

Asignando literales a las acciones que tiene Víctor:

S la cantidad de acciones de San Cristóbal

B la cantidad de acciones de Buena Ventura

K la cantidad de acciones de Backus

Estableciendo las relaciones algebraicas entre las literales:

Martes 22 de Noviembre de 2011, las acciones valían: 16.98S, 9B y 9K y juntas tenían un valor de 13890, por tanto se tiene

$$16.98S + 9B + 9K = 13890$$

El 28 de Noviembre:

$$15.90S + 8.72B + 8.52K = 13122$$

5 de Diciembre:

$$14.08S + 8.20B + 8.76K = 12128$$

Luis sabrá el número de acciones que tiene Víctor resolviendo el sistema:

$$16.98S + 9B + 9K = 13890$$

$$15.90S + 8.72B + 8.52K = 13122$$

$$14.08S + 8.20B + 8.76K = 12128$$

b)

Aplicando el método de Gauss-Seidel, con el vector inicial [450 280 280] en la cuarta iteración se tiene:

Primera iteración: $X^{(1)} = [521.2014 \ 280.8827 \ 283.8180]'$

Segunda iteración: $X^{(2)} = [518.7099 \ 281.6954 \ 287.0620]'$

Tercera iteración: $X^{(3)} = [516.5597 \ 282.4464 \ 289.8149]'$

Cuarta iteración: $X^{(4)} = [514.7025 \ 283.1431 \ 292.1480]'$

Finalmente:

S = 514.7025 \cong 514 acciones de San Cristóbal

B = 283.1431 \cong 283 acciones de Buena Ventura

K = 292.1480 \cong 292 acciones de Backus

c)

El Script implementa el método iterativo de Jacobi

Problema 2

El coeficiente de fricción usado para calcular la caída de presión de un fluido en una tubería de

un sistema, está dado por: $F(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2\text{Ln}\left(\frac{1}{123} + \frac{1}{1792\sqrt{f}}\right) = 0$

a) (2.5 pts) Para el método del punto fijo, haciendo $G(f) = F(f) + f$, determine si la expresión converge alrededor del punto $f = 0.02$

b) (2.5 pts) Utilizando el método de Newton Rapshon, determine f, partiendo desde 0.02, encuentre la respuesta con 4 decimales exactos e indique cuantas iteraciones necesita.

Solucionario:

a) Derivando la expresión:

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2\text{Ln}\left(\frac{1}{123} + \frac{1}{1792\sqrt{f}}\right) + f$$

$$G'(f) = -\frac{0.5}{\sqrt{f^3}} - \left(\frac{0.0005580}{\sqrt{f^3}\left(\frac{1}{123} + \frac{1}{1792\sqrt{f}}\right)}\right) + 1$$

Se verifica que para los valores alrededor de $|G'(f)|$ es mayor a 1, por lo tanto no converge.

b) Haciendo la expresión $f=f-F(f)/F'(f)$

$$F'(f) = -\frac{0.5}{\sqrt{f^3}} - \left(\frac{0.0005580}{\sqrt{f^3}\left(\frac{1}{123} + \frac{1}{1792\sqrt{f}}\right)}\right)$$

Las Iteramos de los valores de f son:

- 1) 0.01088
- 2) 0.01292
- 3) 0.01324
- 4) 0.01325

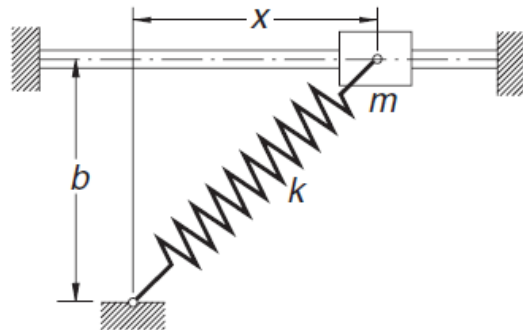
Problema 3

Una masa m está unida a un resorte de longitud libre b y rigidez k . El coeficiente de fricción entre la masa y la barra horizontal es μ . La aceleración de la masa se puede demostrar que es $\ddot{x} = -f(x)$, donde:

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

Si la masa es liberada del reposo en $x=b$, su velocidad en $x=0$ está dado por:

$$v_0 = \sqrt{2 \int_0^b f(x) dx}$$



Calcule v_0 por integración numérica usando la data $m=0.8 \text{ kg}$, $b=0.4 \text{ m}$, $\mu=0.3$, $k=80 \text{ N/m}$ y $g=9.81 \text{ m/s}^2$.

- a) (1.5 pts) Resuelva por Simpson 1/3 con $h = 0.1$.
- b) (1.5 pts) Resuelva por cuadratura Gaussiana $n = 3$.
- c) (1.0 pts) Determine el error y comente sus resultados, dado el valor exacto $v_0=2.4977 \text{ m/s}$.
- d) (1.0 pts) Escriba un programa en MATLAB para este problema.

Solución:

$$a) f(x) = 0.3(9.81) + \frac{80}{0.8}(0.3(0.4) + x) \left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + x^2}} \right)$$

$$h = 0.1$$

$$Ia = \frac{h}{3}(f(0) + 4 * f(0.1) + 2 * f(0.2) + 4 * f(0.3) + f(0.4))$$

$$Ia = 3.1177$$

$$v_{0a} = \sqrt{2 * Ia} = 2.4971$$

b) Haciendo el cambio de limites a [-1, 1]

$$x = 0.2t + 0.2$$

$$dx = 0.2 * dt$$

$$F(t) = 0.2(9.81) + 0.2 \frac{80}{0.8} (0.3(0.4) + 0.2t + 0.2) \left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + (0.2t + 0.2)^2}} \right)$$

$$Ib = 0.555555555555556 * F(-0.774596669241483) + 0.888888888888889 * F(0) + 0.555555555555556 * F(-0.774596669241483)$$

$$Ib = 3.1191$$

$$v_{ob} = 2.4976$$

c) Para la solución a) el error es de 0.0006 y para la solución b) es de 0.0001, por lo tanto en este caso la cuadratura de Gauss es más exacta.

d) Programa en MATLAB:

```
% susti20112.m
f=inline('0.3*9.81+80/0.8*(0.3*0.4+x).*(1-0.4./sqrt(0.4^2+x.^2))')
I=quad(f,0,0.4,1e-10)
v=sqrt(2*I)
h=0.1
I1=h/3*(f(0)+4*f(0.1)+2*f(0.2)+4*f(0.3)+f(0.4))
v1=sqrt(2*I1)
err1=abs(v-v1)
% x=0.2*t+0.2
ff=inline('0.2*0.3*9.81+0.2*80/0.8*(0.3*0.4+0.2*t+0.2).*(1-0.4./sqrt(0.4^2+(0.2*t+0.2).^2))')
t1=-0.774596669241483
t2=0.0
t3=+0.774596669241483
c1=0.555555555555556
c2=0.888888888888889
c3=0.555555555555556
I2=c1*ff(t1)+c2*ff(t2)+c3*ff(t3)
v2=sqrt(2*I2)
err2=abs(v-v2)
```

Problema 4

Sea el problema de valor frontera $u'' = 2u' - u + te^t - t$

Con condiciones de contorno $u(0)=0$ y $u(1)=\frac{e}{2} - 3$. Use $h=0.25$.

Se pide:

- a) (1.5 pts) Resuelva el problema usando el método de las diferencias finitas.
- b) (2.5 pts) Si las pendientes iniciales son $\alpha = -1.6$ y $\beta = -0.8$ obteniendo soluciones aproximadas con el método de Euler de $u(1, \alpha) = -3.0936$ y $u(1, \beta) = -1.5311$ respectivamente. Calcule la pendiente mejorada δ y el valor de $u(1, \delta)$.
- c) (1.0 pts) Compare el porcentaje de error que se cometería si se conoce que la solución es:

X	0	0.25	0.5	0.75	1
U	0	-0.2136	-0.5421	-1.0134	-1.6409

Solución

a) Diferencias finitas

$$20u_{i-1} - 31u_i + 12u_{i+1} = t_i \exp(t_i) - t_i$$

$$B = -1.6409$$

$$\begin{bmatrix} -31 & 12 & 0 \\ 20 & -31 & 12 \\ 0 & 20 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} - 12*B \end{bmatrix}$$

$$u = [0 \quad -0.2098 \quad -0.5360 \quad -1.0080 \quad -1.6409]$$

b) Método del Disparo

$$\alpha = -1.6 \text{ y } \beta = -0.8$$

$$u(1, \alpha) = -3.0936 \text{ y } u(1, \beta) = -1.5311$$

$$B = -1.6409$$

$$\delta = -0.8 - (1.6 - 0.8) * (-1.5311 - B) / (3.0936 - 1.5311) = -0.8562$$

t	u	u'
0	0	-0.8562 = δ
0.2500	-0.2140	-1.2843
0.5000	-0.5351	-1.8552
0.7500	-0.9989	-2.5679
1.0000	-1.6409	-3.3927

$u(1, \delta)$

c)

x	0	0.25	0.5	0.75	1
u	0	-0.2136	-0.5421	-1.0134	-1.6409
udsip	0	-0.2140	-0.5351	-0.9989	-1.6409
% error	--	0.2%	1.3%	1.4%	----
udiff	0	-0.2098	-0.5360	-1.0080	-1.6409
%error	-----	1.8%	1.13%	0.53%	-----