

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE MEDIOS DE COMUNICACIÓN ELECTRÓNICA**

Problema 1

Un bloque se desplaza sobre una superficie plana por efecto de una fuerza cuya magnitud $F(x)$ y el ángulo $\theta(x)$, que forma con la horizontal, varían en función de la posición x que va tomando el bloque. Debido a restricciones experimentales, solo ha sido posible registrar la siguiente información:

x (pies)	0.0	2.5	5.0	10.0	12.5	15.0	20.0	25.0	30.0
F(x)(libras)	0.0	6.0	9.0	13.0	13.5	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$ (radianes)	0.50	0.76	1.40	0.75	0.57	0.90	1.30	1.48	1.50

Aplicando integración numérica con el menor error posible

- (3 Pts.) Calcular el trabajo (W) realizado por el bloque en su recorrido. Si se tiene que $W = \int_0^{30} F(x) \cdot \cos(\theta(x)) \cdot dx$ Trabaje con 4 lugares decimales.
- (2 Pts.) Escriba comandos Matlab para graficar los datos del problema.

Problema 2

La posición de un vehículo de 2 toneladas sobre una pista recta, es registrada por un instrumento de medición por ondas de radio, entregando la siguiente información:

Tiempo (s)	1	5	8	9
Posición(m)	2	5	11	16

Haciendo uso de un spline cubico natural, calcule lo siguiente:

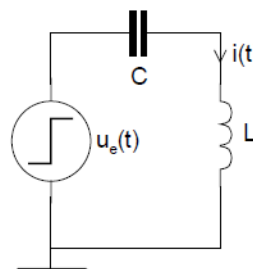
- (2 Ptos.) Determine el spline indicando sus resultados parciales.
- (1 Pto.) La posición a los 7 segundos.
- (1 Pto.) La velocidad del vehículo a los 8 segundos.
- (1 Pto.) La fuerza que genera el motor para poder mover el vehículo en el instante 8 segundos, considerando que Fuerza=masa x aceleración.

Problema 3

- (1 Pto.) Determine el sistema de EDOs correspondiente a la ecuación del circuito eléctrico descrito en la figura 1:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L} \left(\frac{du_e}{dt} - \frac{1}{C} i(t) \right)$$

Hacer $\frac{du_e}{dt} = 0$



Datos:

C=1 μF

L= 10 mH.

$u_e(t)=0$ V en t_0 , después 1V.

Figura 1 Circuito Eléctrico

- (3 Pts.) Determine los dos primeros valores de la función solución para la corriente de malla con un tamaño de paso $h = 0.02$ ms desde el momento $t_0=0$ con el método de Euler. Con valores iniciales $i(0)=0$, $di(0)/dt=1/L$
- (1 Pto.) Determine el algoritmo de Taylor de orden 2.

Problema 4

Representamos por u el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el potencial de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Suponiendo que $R_1 = 2 \text{ mm}$, $R_2 = 4 \text{ mm}$ y $V_1 = 110$ voltios:

- (2.5 Pts.) Aproximar el valor del potencial u para $r = 3$ usando el método del disparo. Considere $h=1$, $\epsilon = 10^{-3}$. Use Euler para los cálculos intermedios.
- (1 Pto.) Si la solución exacta es $u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right)$, determinar el error exacto cometido en la aproximación de a).
- (1.5 Pto.) Implementar una función en Matlab que dadas las pendientes iniciales s_0 y s_1 con soluciones aproximadas uN_0 , uN_1 . Calcule la pendiente mejorada δ y el valor de $uN\delta$

```
function Y=disparo(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)  
% f: nombre del archivo .m donde se define el sistema  
% a, b: extremos del intervalo  
% s0, s1: pendientes iniciales  
% alpha, beta: valores extremos  
% h: tamaño de paso
```

Los Profesores

Solución 1

a) Según la tabla calculamos $F(x) \cdot \cos(x)$

x (pies)	0.0	2.5	5.0	10.0	12.5	15.0	20.0	25.0	30.0
$F(x) \cdot \cos(x)$	0.0	4.3490	1.5297	9.5120	11.3657	8.7025	2.8087	1.0881	0.3537

Ahora aplicamos integración por partes según lo siguiente:

$$W = \int_0^{30} F(x) \cdot \cos(x) \cdot dx = \int_0^5 F(x) dx + \int_5^{10} F(x) dx + \int_{10}^{15} F(x) dx + \int_{15}^{30} F(x) dx$$

Estos cuatro integrandos se evalúan con Simpson 1/3 (h = 2.5), Trapecios (h = 5), Simpson 1/3 (h=2.5) y Simpson 3/8 (h = 5), respectivamente

$$\int_0^5 F(x) dx = \frac{2.5}{3} [0 + 4(4.3490) + 1.5297] = 15.7715$$

$$\int_5^{10} F(x) dx = \frac{5}{2} [1.5297 + 9.5120] = 27.6041$$

$$\int_{10}^{15} F(x) dx = \frac{2.5}{3} [9.5120 + 4(11.3657) + 8.7025] = 53.0643$$

$$\int_{15}^{30} F(x) dx = \frac{5}{8} (5) [8.7025 + 3(2.8087) + 3(1.0881) + 0.3537] = 38.8999$$

Finalmente sumando tenemos: $W = 135.3398$ Respuesta
 Comandos de Matlab

```
>> x=[0.0 2.5 5.0 10.0 12.5 15.0 20.0 25.0 30.0];
>> fx=[0.0 6.0 9.0 13.0 13.5 14.0 10.5 12.0 5.0];
>> tetha=[0.50 0.76 1.40 0.75 0.57 0.90 1.30 1.48 1.50];
>> fxcos=fx.*cos(tetha);
>> plot(x,fx,x,fxcos), gridon,xlabel('Eje X'),ylabel('Eje Y')
```

Solución 2

Preparando la tabla de valores

i	x	y	hi	y[xi,xi+1]
0	1	2	4	0.75
1	5	5	3	2
2	8	11	1	5
3	9	16		

Ordenando para resolver el sistema de ecuaciones para hallar las M
 Considerando spline cubico natural M_0 y $M_3 = 0$

H		M		Y	
14	3	M1		7.5	
3	8	M2		18	

Resolviendo

M0	0
M1	0.05825
M2	2.22816
M3	0

a)

$$P_i = a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i$$

	a	b	c	d
p0	0.00242718	0	0.71116505	2
p1	0.12055016	0.02912621	0.8276699	5
p2	-0.3713592	1.11407767	4.25728155	11

b) $P_1(7) = 7.7362$

c) Derivando el polinomio P1 y evaluando en 8

$$P_1'(8) = 4.2572 \text{ m/s}$$

d) $P_1''(8) = M_2 = 2.2281 \text{ m/s}^2 = \text{aceleración}$

$$\text{Fuerza} = 4456 \text{ N}$$

Solución 3

La ecuación integral se transforma mediante la derivación de una ecuación diferencial de primer orden y de forma explícita para $i(t)$ se escribe:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L} \left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t) \right)$$

a)

$$z_1 = i(t) \quad z_1' = i'(t) = z_2 \quad z_2' = i''(t)$$

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = \frac{1}{L} \left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{z_1}{C} \right)$$

Hacer $\frac{du_e}{dt} = 0$

Datos:

L =	0.01	$i(t_0) =$	0
C =	1.00E-06	$i'(t_0) =$	1.00E+02
$U_E =$	1	T =	1E-08
$t_0 =$	0		
h =	2.00E-05		

b) Algoritmo de Euler:

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF(t, Z^{(i)})$$

i	t_i	$z_1 = i(t_i)$	$z_2 = i'(t_i)$
0	0	0	100
1	0.00002	2.00E-03	100
2	0.00004	4.00E-03	96

c)

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF(t, Z^{(i)}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial F}{\partial z} F(t, Z^{(i)}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{1}{LC} z_1 \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{1}{LC} z_1 \end{bmatrix}$$

Solución 4

(a)

$$u'' = -\frac{2}{r} u', \quad r \in [2, 4].$$

$$u(2) = 110; \quad u'(2) = 0$$

Y =

2.0000 110.0000 -55.0000
 3.0000 69.9383 -28.2922
 4.0000 49.3304 -14.5536

uN0 = 49.3304

s1 = -79.6652

Y =

2.0000 110.0000 -79.6652
 3.0000 51.9723 -40.9800
 4.0000 22.1226 -21.0803

uN1 = 22.1226

s2 = -99.7204

Y =

2.0000 110.0000 -99.7204
 3.0000 37.3641 -51.2965
 4.0000 0.0000 -26.3871

(b)

La solución aproximada para r=3:

$$u(3) \approx 37.3641$$

Valor Exacto=36.6667

Error= 0.6974

(c)

function Y=dispalin2(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)

%f: nombre del archivo .m donde se define el sistema

%a,b: extremos del intervalo

%s0,s1: pendientes iniciales

%alpha,beta: valores extremos

%h tamaño de paso

s=s0+(s1-s0)*(beta-uN0)/(uN1-uN0);

Y=ode45(f,[a:h:b],[alpha s]);