

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA
- ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS
- PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA
- DURACION: 110 MINUTOS

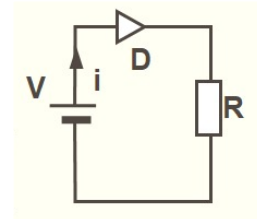
Docentes: Castro Robert – Obregón Máximo

Problema 1

La corriente i de un diodo semiconductor varía con la tensión V según el modelo

$$i = I_s(e^{\lambda V} - 1) \quad (1)$$

Donde I_s (amperios) se denomina contracorriente de saturación, y λ [volts⁻¹] es un valor característico del diodo. A continuación, se presenta los datos obtenidos al probar el diodo.



V	0,03	0,06	0,09	0,12
i	0,041	0,133	0,342	0,819

a) **(0.5P)**

Usando solo los datos en $V=0.03$ y $V=0.12$, justifique el siguiente sistema de ecuaciones no lineales expresado en la forma:

$$F(I_s; \lambda) = \begin{bmatrix} I_s(e^{0.03\lambda} - 1) - 0.041 \\ I_s(e^{0.12\lambda} - 1) - 0.819 \end{bmatrix} = 0$$

b) **(1.0P)** Determine el algoritmo de Newton Raphson para sistemas aplicado a este problema.

c) **(2P)** Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson empezando con el punto inicial $I_s^{(0)} = 0.1$; $\lambda^{(0)} = 30$ y determine el error cometido en cada iteración.

d) **(1.5)** Complete el siguiente script

```
[x,y]=meshgrid(0:.1:30);
z1=_____
z2=_____
figure,
subplot(2,2,1),mesh(x,y,z1),
title('z1=f(x,y)')
hold on,
contour(x,y,z1,[0 0], 'r', 'linewidth', 2);
subplot(2,2,2),mesh(x,y,z2),
title('z2=g(x,y)')
hold on
contour(x,y,z2,[0 0], 'g');
subplot(2,2,3),
contour(x,y,z1,[0 0], 'r');
hold on,
_____
xlabel('x'),
ylabel('y')
%legend('z1=0', 'z2=0', 2);
title('Intersección')
```

Problema 2

Tomando como referencia el **Problema 1**.

$$i = I_s(e^{\lambda V} - 1) \quad (1)$$

Tabla 1 Datos del Laboratorio

V	0.03	0.06	0.09	0.12
i	0.041	0.133	0.342	0.819

a) **(1.5P)** Usando los datos interpole usando un polinomio de Newton de grado 2, si se desea interpolar $i(0.05)$.

¿Cuántas cifras decimales exactas tiene esta aproximación? Justifique.

b) Use el dato de la aproximación de I_s que encontró en el problema 1 ítem c), si no realizó el problema (1), asuma $I_s \approx 0.031$, adecuando la ecuación (1) a una regresión lineal. Para lo cual debe hacer lo siguiente:

b.1) **(0.5P)** Determine la función de regresión de la forma: $\bar{y} = c_1V + c_2$

b.2) **(2P)** Realice el planteamiento de las ecuaciones y calcule los parámetros I_s y λ , mediante un análisis por mínimos cuadrados de todo el conjunto de datos dados en la Tabla 1. Comente si I_s es aproximado al valor supuesto o calculado en el ítem c) del Problema 1.

c) **(1P)** Aproxime $i(0.05)$ usando el modelo obtenido en b.2)¿Es un buen ajuste de regresión? Justifique.

Problema 3

Un eje circular de un diámetro d (m) que varía con la posición axial x (m) según:

$$d = 0.02 \frac{(1 + x^2)}{e^x} \quad 0 \leq x \leq 3$$

Una carga axial P de 30000 N se aplica en un extremo del eje, cuyo módulo de elasticidad E es 2×10^{11} N/m². La elongación axial del eje es Δx (m) y está dado por:

$$\Delta x = \frac{P}{E} \int \frac{1}{A} dx; \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Siendo A (m²) el área de la sección transversal.

- (1.5P)** Aproxime Δx aplicando la fórmula de Simpson 1/3 con 10 particiones.
- (1.5P)** Aproxime Δx mediante la Cuadratura de Gauss ($N=3$).
- (0.5P)** Si la Δx exacta es 0.003095486896586, determine los errores y comente sus resultados.
- (1.5)** Escriba un script en MATLAB para resolver a, b y c.

Problema 4

Una barra de plomo es calentada hasta 300°C y se sabe que la rapidez con que se enfría es proporcional a la diferencia entre su temperatura instantánea y la del medio que le rodea. Considerar la temperatura ambiente 14 °C.

- (1.0P)** Plantee la ecuación diferencial.
- (1.5P)** Estime la constante de proporcionalidad de enfriamiento, si al cabo de 10 segundos se reduce su temperatura en 20°C, usando el método de Euler con una iteración.
- (1.5P)** Con la constante de proporcionalidad hallada en el ítem a) y usando como nuevo punto de partida la temperatura de 280°C, estime a cuanto se reduce la temperatura luego de 50 segundos usando el método de Runge Kutta de orden 4 en una iteración (o paso).
- (1.0P)** Desarrolle un script, que permita estimar cuanto tiempo se demora para enfriarse desde 300 °C hasta 15°C con un paso de 10^{-3} usando el método de Euler.

SOLUCIONARIO

Problema 1

Solución:

a)

$$F(I_s; \lambda) = \begin{bmatrix} I_s(e^{0.03\lambda} - 1) - 0.041 \\ I_s(e^{0.12\lambda} - 1) - 0.819 \end{bmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{bmatrix} I_s^{(k+1)} \\ \lambda^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (e^{0.03\lambda^{(k)}} - 1) & I_s^{(k)} (0.03 \times e^{0.03\lambda^{(k)}}) \\ (e^{0.12\lambda^{(k)}} - 1) & I_s^{(k)} (0.12 \times e^{0.12\lambda^{(k)}}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_s^{(k)} (e^{0.03\lambda^{(k)}} - 1) - 0.041 \\ I_s^{(k)} (e^{0.12\lambda^{(k)}} - 1) - 0.819 \end{bmatrix}$$

c) Iteración 01

$$\begin{bmatrix} I_s^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1607611 & -0.0195024 \\ -94.087066 & 3.8577692 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1049603 \\ 3.4398234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0316188 \\ 29.301943 \end{bmatrix}$$

Iteración 02

$$\begin{bmatrix} I_s^{(2)} \\ \lambda^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0452509 \\ 26.605363 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.2130569 & -0.0217025 \\ -310.21034 & 13.380478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0035391 \\ 0.2135865 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0319609 \\ 27.541931 \end{bmatrix}$$

d)

```
[x,y]=meshgrid(0:.1:30);
z1=x*(exp(0.03*y)-1)-0.041;
z2= x*(exp(0.12*y)-1)-0.819;
figure,
subplot(2,2,1), mesh(x,y,z1), title('z1=f(x,y)')
hold on,
contour(x,y,z1,[0 0], 'r', 'linewidth',2);
subplot(2,2,2), mesh(x,y,z2), title('z2=g(x,y)')
hold on
contour(x,y,z2,[0 0], 'g', 'linewidth',2);
subplot(2,2,3),
contour(x,y,z1,[0 0], 'r', 'linewidth',2);
hold on,
contour(x,y,z2,[0 0], 'g', 'linewidth',2);
xlabel('x'),
ylabel('y')
%legend('z1=0','z2=0',2)
title('Intersección')
```

Problema 2

a) $h=0.03$

V	i	Δi	$\Delta^2 i$	$\Delta^3 i$
0.03	<u>0.041</u>	<u>0.0920</u>	<u>0.1170</u>	<u>0.151</u>
0.06	0.133	0.2090	0.2680	
0.09	0.342	0.4770		
0.12	0.819			

$$s = \frac{V-0.03}{h}$$

$$P_2(V) = i + \frac{s}{1} \Delta i + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 i + \frac{s(s-1)(s-2)}{2} \Delta^3 i$$

$$s = \frac{0.05-0.03}{h} = \frac{2}{3}$$

$$P_2(0.05) = 0.0893 \quad \text{Error} \approx 0.075 * 10^{-1} \leq 0.5 * 10^{-k} \quad k=1 \text{ c.d.e (incluyendo redondeo)} \quad i(0.05) \approx 0.1$$

b) $I_s \approx 0.031$

b.1) Modifique la ecuación (1) $i + I_s \approx I_s e^{\lambda V} \rightarrow \bar{y} = \ln(i + I_s) = \underbrace{\lambda}_{c_1} V + \underbrace{\ln(I_s)}_{c_2}$

V:	0.03	0.06	0.09	0.12
i:	0.041	0.133	0.342	0.819
\bar{y}	-2.6311	-1.8079	-0.9862	-0.1625

Función de regresión: $\bar{y} = c_1 x + c_2$,

b.2) Ecuación Normal:

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 & 1 \\ 0.06 & 1 \\ 0.09 & 1 \\ 0.12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6311 \\ -1.8079 \\ -0.9862 \\ -0.1625 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.027 & 0.3 \\ 0.3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2957 \\ -5.5877 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = 27.4247V - 3.4538$$

$$\lambda = 27.4247 \quad \text{y} \quad I_s = e^{-3.4538} = 0.0316 \rightarrow i \approx 0.0316 e^{27.4247V}$$

c) $i(0.05) = 0.0930$

$R^2 \rightarrow 1$ Buen modelo.

$$d = 0.02 \frac{(1+x^2)}{e^x} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$P=30000 \text{ N}$$

$$E=2 \times 10^{11}$$

$$I = \int_0^3 \frac{4}{\pi \left(0.02 \frac{(1+x^2)}{e^x}\right)^2} dx$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi \left(0.02 \frac{(1+x^2)}{e^x}\right)^2}$$

a) Aplicando Simpson 1/3:

$$h=0.3$$

$$I_s = h/3 * (f(0) + 4*f(0.3) + 2*f(0.6) + 4*f(0.9) + 2*f(1.2) + 4*f(1.5) + 2*f(1.8) + 4*f(2.1) + 2*f(2.4) + 4*f(2.7) + f(3))$$

$$I_s = 2.064075089802862e+04$$

$$\Delta x_s = (P/E) * I_s = 0.003096112634704$$

$$\text{Err}_s = 6.257381178712690e-07$$

b) Aplicando cuadratura de Gauss

$$x = (3/2) * (t+1)$$

$$dx = 3/2 * dt$$

$$F(t) = \frac{3}{2} f\left(\frac{3}{2}(t+1)\right)$$

$$I_g = \frac{5}{9} * F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} * F(0) + \frac{5}{9} * F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$I_g = 2.059526860488303e+04$$

$$\Delta x_g = (P/E) * I_g = 0.003089290290732$$

$$\text{Err}_g = 6.196605853968536e-06$$

c)

La fórmula de Simpson 1/3 es ligeramente más precisa que la cuadratura de Gauss la cual se puede mejorar tomando mayor cantidad de puntos.

d)

```
clc, clear all, syms x t, format long
```

```
P=30000, E=2e11
```

```
d=0.02*(1+x^2)/exp(x)
```

$$A = \pi \cdot d^2 / 4$$

$$f = 1/A$$

$$I = \text{double}(\text{int}(f, 0, 3)) \quad \% \quad 2.063657931057615e+04$$

$$dx = P/E \cdot I \quad \% \quad 0.003095486896586$$

$\% \text{ Simpson } 1/3$

$$h = 0.3$$

$$x = 0:h:3$$

$$y = \text{double}(\text{subs}(f, x))$$

$$c = [1 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 1]$$

$$I_s = h/3 \cdot \text{sum}(c \cdot y) \quad \% \quad 2.064075089802862e+04$$

$$dx_s = P/E \cdot I_s \quad \% \quad 0.003096112634704$$

$$es = \text{abs}(dx - dx_s) \quad \% \quad 6.257381178712690e-07$$

$\% \text{ Cuadratura de Gauss}$

$$ff = 3/2 \cdot \text{subs}(f, 3/2 \cdot (t+1))$$

$$c_1 = 5/9, \quad c_2 = 8/9, \quad c_3 = 5/9$$

$$x_1 = -\sqrt{3/5}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3/5}$$

$$I_g = \text{double}(c_1 \cdot \text{subs}(ff, x_1) + c_2 \cdot \text{subs}(ff, x_2) + c_3 \cdot \text{subs}(ff, x_3)) \quad \% \quad 2.059526860488303e+04$$

$$dx_g = P/E \cdot I_g \quad \% \quad 0.003089290290732$$

$$eg = \text{abs}(dx - dx_g) \quad \% \quad 6.196605853968536e-06$$

Problema 4

Parte a)

$$T' = K(T - T_m)$$

$$T' = K(T - 14)$$

T la temperatura instantánea

T_m es la temperatura ambiente

K la constante de proporcionalidad

Parte b)

$$x := 0 \quad y_i := 300 \quad y_f := 280 \quad h := 10 \quad T' = K(T - T_m) \quad f(x, y) := K(y - 14)$$

$$y = y + h \cdot f(x, y) \quad 280 = 300 + 10 \cdot K(300 - 14) \quad K := \frac{280 - 300}{10 \cdot (300 - 14)} = -0.00699300699$$

Parte c)

$$x := 0 \quad y := 280 \quad h := 50 \quad f(x, y) := K \cdot (y - 14)$$

$$k_1 := h \cdot f(x, y) = -93.00699300699$$

$$k_2 := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = -76.74702919458$$

$$k_3 := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = -79.58968021074$$

$$k_4 := h \cdot f(x + h, y + k_3) = -65.17843349275$$

$$y := y + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = 201.5235257816$$

Se ha reducido 78.47647 °C

Parte d)

```
clc;clear;
x0=0;y0=300;h=1e-3;
f=inline('0.00699300699*(14-y)');
x=x0; X=x0;
y=y0; Y=y0;
while y>15
    x=x+h;
    y=y+h*f(y);
end
fprintf('El tiempo transcurrido es ');
fprintf('%0.2f segundos', x);
```