



EXAMEN FINAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL EXAMEN MARCAS (TEXTOS O SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO.**

INDICACIONES:

1. Duración: 110 minutos.
2. Se permite el uso de 2 hojas de formulario, calculadoras científicas y/o programable sin internet.
3. Mantener celulares apagados o en modo avión.
4. Escribe tus respuestas de manera clara y legible y asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo esté claramente justificado.

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1.- (1p) Dado el siguiente sistema No lineal:
$$\begin{cases} 5x - \cos(2 * y) = 0.5 \\ x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$$

Utilizando el método del punto fijo y sabiendo que la raíz que buscamos está en el intervalo [0,1] para ambas variables. Se pide:

- Despeje x en la primera ecuación e y en la segunda ecuación.
- Calcule el valor de K o L del criterio de convergencia.
- Concluya si este método converge o diverge para el dominio dado.

Algoritmo del punto fijo:

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(2*y)+0.5}{5} & = g_1(x, y) \\ y = \sqrt{\frac{x^2+1}{3}} & = g_2(x, y) \end{cases}$$

$$J_G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\sin(2y)}{5} \\ \frac{x}{\sqrt{5(x^2+1)}} & 0 \end{bmatrix}$$

$\|J_G\|_1 < 0.4 \leq k < 1$, Por lo tanto, el método converge.

2.- (1p) De la siguiente tabla, halle el valor de: $a \times b + c - d + e - f$

x	y	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-1	$a + b$		
1	2	$c + d$	$a/4$	
2	8	$e + f$	$c/8$	$e/16$
3	17			

Solución: De la tabla de diferencias divididas dada:

$$a + b = \frac{2-(-1)}{1-0} = 3; \quad c + d = \frac{8-2}{2-1} = 6; \quad e + f = \frac{17-8}{2-1} = 9;$$

$$\frac{a}{4} = \frac{6-3}{2-0} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 6; \quad b = -3; \quad \frac{c}{8} = \frac{9-6}{3-1} = \frac{3}{2} \rightarrow c = 12; \quad d = -6; \quad \frac{e}{16} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{3-0} = 0 \rightarrow e = 0; \quad f = 9$$

Resolviendo: $a*b + c - d + e - f = (6)*(-3) + 12 - (-6) + 0 - 9 = -9$ (Respuesta)

3.- (1p) El siguiente modelo se utiliza con frecuencia en ingeniería ambiental para parametrizar el efecto de la temperatura $T(^{\circ}\text{C})$ sobre las velocidades de reacción bioquímica k (por día), $k = k_{20}\theta^{T-20}$, donde k_{20} y θ son parámetros. Use una transformación para linealizar esta ecuación.

$T(^{\circ}\text{C})$	6	12	18	24	30
k (por día)	0.14	0.20	0.31	0.46	0.69

a) ¿Cuál es la función de regresión?

Considere $x = T$

$$y = \ln(k)$$

$$y = \underbrace{\ln(\theta)}_{c_1} x + \underbrace{\ln(k_{20}) - 20\ln(\theta)}_{c_2}$$

b) Complete la ecuación normal:

$$\begin{bmatrix} 1980 & a \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -81.9598 \\ -5.8943 \end{bmatrix}$$

y diga cómo se obtienen.

Nota: Considere el orden de los coeficientes igual al que guarda MATLAB.

$$a = \sum x = 90 \quad y \quad b = \sum 1 = 5.$$

4.- (1p) Determine el mínimo número de rectángulos para obtener la integral $\int_0^1 e^{2x} dx$, con un error absoluto menor a 0.01. Use la fórmula de error: $E = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\epsilon)$; $\epsilon \in (a, b)$.

Solución

$$E = \frac{1-0}{6} h^2 M$$

$$M = \max|f''(\epsilon)|; \quad \epsilon \in (0, 1)$$

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

$$M = 4e^2$$

N=Numero de particiones

$$h=(1-0)/N$$

$$\frac{1-0}{6} (1/N)^2 4e^2 < 0.01$$

$$N > 22.1947$$

N=24, ya que debe ser entero par.

NR=N/2=12 rectángulos

5.- (1p) Para la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^1 (e^x + 2x^2 + 7) dx$$

Se desea aplica la Cuadratura de Gauss-Legendre (n = 3), cuya forma es:

$$I = \left(\frac{m}{p}\right) * f\left(-\sqrt{\frac{p}{3m}}\right) + \left(\frac{s}{p}\right) * f(q) + \left(\frac{m}{p}\right) * f\left(\sqrt{\frac{p}{3m}}\right)$$

Halle: $m*s + p - q$

Solución: Según la tabla de la Cuadratura de Gauss-Legendre (n=3) tenemos:

w_i	5/9	8/9	5/9
x_i	$-\sqrt{3/5}$	0	$\sqrt{3/5}$

Obtenemos: $m = 5$; $s = 8$; $p = 9$; $q = 0$

Por lo tanto, hallamos: $m*s + p - q = (5)*(8) + 9 - 0 = 49$ **(Respuesta)**

6.- (1p) Sea la EDO de tercer orden: $y''' = e^{-2x} + y'$, $y(1)=1$ $y'(1)=2$ $y''(1)=3$

Estime $y''(1.1)$ mediante el método de Taylor de Orden 2 ($h=0.05$)

Solución:

$$y' = z \quad y'' = z' = w$$

$$z' = w \quad z'' = w' = e^{-2x} + z$$

$$w' = e^{-2x} + z \quad w'' = -2e^{-2x} + w$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h*y'_n + h^2/2*y''_n$$

$$z_{n+1} = z_n + h*z'_n + h^2/2*z''_n$$

$$w_{n+1} = w_n + h*w'_n + h^2/2*w''_n$$

$$h = 0.05$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 2 \quad w_0 = 3$$

$$x_1 = 1.0500 \quad y_1 = 1.1038 \quad z_1 = 2.1527 \quad w_1 = 3.1102$$

$$x_2 = 1.1000 \quad y_2 = 1.2153 \quad z_2 = 2.3110 \quad w_2 = 3.2275$$

$$y''(1.1) = w(1.1) = 3.2275$$

7.- (1p) Para el conjunto de datos:

x	0	1	2	3
y	3	7	19	31

a) Complete el siguiente código MATLAB para determinar el polinomio interpolante de Lagrange:

%Función pol_lagrange.m

function plg = pol_lagrange(x,y)

n = _____; **Respuesta:** length(x)

p = zeros(1,n);

for j = 1:n

q = _____; **Respuesta:** poly(x([1:(j-1) , (j+1):n]))

L = q/polyval(q,x(j));

plg = _____; **Respuesta:** plg + L*y(j)

end

b) Indique la expresión de en comando MATLAB para $L_2(x)$ con el conjunto de datos dado:

$L_2 =$ _____ **Respuesta:** poly([0 1 3])/polyval(poly[0 1 3],2)

8.- (1p) Complete una función en MATLAB que emule la función trapz con cualquier ancho de paso:

```
function integral = trapz_propio (x, y)
    % Verifica que x e y tengan la misma longitud
    if _____ length(x) ~= length(y)
        error('x e y deben ser de la misma longitud');
    end
    % Número de puntos
    n = _____ length(x);
    % Inicializa la integral
    integral = 0;
    % Aplica la regla del trapecio para intervalos desiguales
    for i = _____ 1:n-1
        h = _____ x(i + 1) - x(i);
        integral = _____ integral + (y(i) + y(i + 1)) * h / 2;
    end
end
```

PARTE II

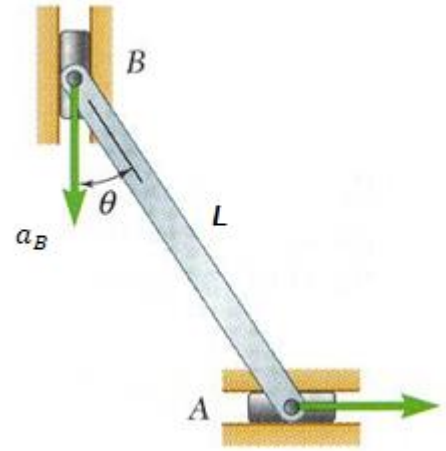
Problema 1

Dado un mecanismo donde la aceleración del extremo B se puede calcular con:

$$a_B = -L \omega^2 \cos \theta - L \alpha \sin \theta$$

Si la Longitud de la barra es $L=2$ m, la velocidad angular la barra es $\omega=2$ rad/s, la aceleración angular la barra es $\alpha=2.5$ rad/s², y θ es el ángulo que forma la barra con la vertical, se pide:

- (2p) Construya un polinomio interpolante de Lagrange para aproximar la aceleración de B, para valores de $\theta = \pi/8, \pi/4, 5\pi/8, 3\pi/4$.
- (1.5p) Estime la aceleración de B para $\theta=\pi/3$ a partir del polinomio de Lagrange y determine el error relativo.
- (0.5p) Comente los resultados e indique como mejorar la precisión.



Solución

a) Tabulando:

t	0.3927	0.7854	1.9635	2.3562
aB	-9.3045	-9.1924	-1.5579	2.1213

$$L_0(x) = \frac{(t - \frac{\pi}{4})(t - \frac{5\pi}{8})(t - \frac{3\pi}{4})}{(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{8})(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{4})}$$

$$L_1(x) = \frac{(t - \frac{\pi}{8})(t - \frac{5\pi}{8})(t - \frac{3\pi}{4})}{(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8})(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{8})(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})}$$

$$L_2(x) = \frac{(t - \frac{\pi}{8})(t - \frac{5\pi}{8})(t - \frac{3\pi}{4})}{(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8})(\frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{8})(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{4})}$$

$$L_3(x) = \frac{(t - \frac{\pi}{8})(t - \frac{\pi}{4})(t - \frac{3\pi}{4})}{(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8})(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{4})(\frac{5\pi}{8} - \frac{5\pi}{8})}$$

$$P(x) = L_0(x) * -9.3045 + L_1(x) * -9.1924 + L_2(x) * (-1.5579) + L_3(x) * (2.1213)$$

$$P(x) = -1.0719 * x^3 + 7.3115 * x^2 - 7.1711 * x - 7.5510$$

b)

$$a_{B_apr} = -8.2736$$

$$a_{B_exa} = -8.3301$$

$$err_rel = 0.6784 \%$$

- Se podría considerar un error aceptable, se podría mejorar tomando un punto adicional o usar un spline cubico.

Problema 2

La presión del viento se midió a varias alturas en una pared vertical, como se muestra en el diagrama 1.

Halle la altura del centro de presión, que se define como:

$$\bar{h} = \frac{\int_0^{112\text{ m}} hp(h)dh}{\int_0^{112\text{ m}} p(h)dh}$$

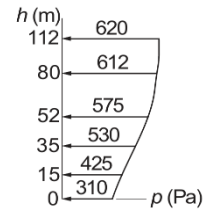


Diagrama 1 Presión del viento en una pared vertical.

Un análisis de los datos mostrados en las tablas 1 y 2, nos indican que el numerador y el denominador del integrando tienen un comportamiento como un polinomio cúbico.

- a) **(1p)** Construya dos **polinomios de Newton** cúbicos (ruta subrayada) a usarse para las mediciones intermedias.
- b) **(1.5p)** Con los polinomios de a) determine los puntos necesarios para aproximar \bar{h} usando la cuadratura de Gauss Legendre (cuadratura abierta). Justifica cuántos puntos tomarías como mínimo.
- c) **(1.5p)** Usando una cuadratura cerrada (una parábola) aproxime \bar{h} . Comente sus resultados al comparar b) y c).

Observación: Solo los valores de la tabla 1 deben ser multiplicados por 10^4 para ser usados.

h	$hp(h)$	DD1	DD2	DD3
0	0	0.0125	0.00202	-0.000048
0.0015	0.1875	0.0834	-0.00045	0.0000073
0.0035	1.8550	0.0668	0.00003	-0.0000013
0.0052	2.9900	0.0681	-0.00007	0
0.0080	4.8960	0.0640	0	0
0.0112	6.9440	0	0	0

Tabla 1: Valores de $h, hp(h), DD1, DD2$ y $DD3$ deben multiplicarse por 10^4

h	$p(h)$	DD1	DD2	DD3
0	310	-12.3333	0.9310	-0.0271
15	125	20.2500	-0.4758	0.0069
35	530	2.6471	-0.0295	0.0002
52	575	1.3214	-0.0179	0
80	612	0.2500	0	0
112	620	0	0	0

Tabla 2: Valores de $h, p(h), DD1, DD2$ y $DD3$

- a) $P_{3n}(h) = f_1(h) = 1875 + 834(h - 15) + 4.5(h - 15)(h - 35) + 0.073(h - 15)(h - 35)(h - 52)$
 $P_{3a}(h) = f_2(h) = 125 + 20.25(h - 15) - 0.4758(h - 15)(h - 35) + 0.0069(h - 15)(h - 35)(h - 52)$
- b) Con la cuadratura de Gauss Legendre de 2 puntos serían suficientes, ya que esta cuadratura ajusta exactamente hasta polinomios de grado 3.

$$a = 0 ; b = 112$$

$$\text{Ceros de Legendre: } t = [-1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}]$$

$$\text{Traslación de las variables } h = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2} = 56(t + 1)$$

$$\text{Puntos a aplicar la cuadratura de G_L: } h = [23.6684 \quad 88.3316]$$

$$\text{Interpolando con el Polinomio1 de Newton } f_1(h) = [0.975 \quad 5.5807]$$

$$W = [1 \quad 1]$$

$$\text{Interpolando con el Polinomio2 de Newton } f_2(h) = [366.4733 \quad 729.5767]$$

$$\bar{h} = \frac{\int_0^{112} hp(h) dh}{\int_0^{112} p(h) dh} = \frac{\sum W * f_1(h)}{\sum W * f_2(h)} = 59.8117$$

- c) Usando una parábola, se obtendría el mismo valor anterior ya que ajusta exactamente hasta polinomios de grado cúbico.

Demostración:

$$\text{Interpolando con el polinomio 1 de Newton } f_1(56) = 32,446 \quad (\text{punto medio})$$

$$\text{Interpolando con el polinomio 2 de Newton } f_2(56) = 569.3 \quad (\text{punto medio})$$

$$\bar{h} = \frac{\int_0^{112} hp(h) dh}{\int_0^{112} p(h) dh} = \frac{1f_1(0) + 4f_1(56) + f_1(112)}{1f_2(0) + 4f_2(56) + f_2(112)} = 59.8117$$

Problema 3

Las tuberías de enfriamiento de un motor de combustión interna instalados en un buque costero siguen la ley de enfriamiento de Newton, partiendo de $t = 0$ min, la temperatura inicial es 120°C , para $t = 16$ min, la temperatura es de 70°C y para $t = 32$ min, la temperatura es de 45°C .



- a) **(1p)** Si $T(t)$ denota la temperatura ($^{\circ}\text{C}$) de las tuberías de enfriamiento en el instante t (min), el modelo de la velocidad de enfriamiento es:

$$\frac{dT}{dt} = - \left(\frac{\text{Ln}(p)}{q} \right) * (T - r)$$

En dicho modelo, halle los valores de p y q , considerando $r = 20^{\circ}\text{C}$ (Temperatura ambiente).

- b) **(2p)** Determine la temperatura aproximada de las tuberías de enfriamiento a los 17 min, usando el método de Runge Kutta orden 2 y un tamaño de paso $h = 1$ min (considere un paso). Use como mínimo 5 cifras decimales en sus cálculos para no perder precisión.
- c) **(1p)** Sabiendo que la solución exacta es:

$$T(t) = 20 * \left(1 + 5 * (0.5)^{\frac{t}{16}} \right)$$

Determine el error absoluto del método empleado en el apartado (b).

Solución:

- a) En base a los datos del problema: (0,120); (16,70); (32,45) empleamos la ecuación de la Ley de Enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{amb})$$

Donde T_{amb} es la temperatura del medio ambiente (en este caso, el interior del cuarto donde se encuentra el motor marino). La solución de esta ecuación se denota como:

$$T = T_{amb} + Ce^{-kt}$$

Donde C y k son constantes ($k > 0$). Entonces, reemplazando los tres puntos obtenidos en esta ecuación, tendremos un sistema de 3 ecuaciones:

$$120 = T_{amb} + Ce^{-k(0)}$$

$$70 = T_{amb} + Ce^{-k(16)}$$

$$45 = T_{amb} + Ce^{-k(32)}$$

Resolviendo: $T_{amb} = 20 \text{ °C}$; $C = 100$; $k = \text{Ln}(2)/16$

Al reemplazar en la ecuación de modelamiento de la velocidad de enfriamiento, los valores solicitados son: $p = 2$; $q = 16$; $r = 20$ (**Respuestas**)

- b) Para hallar la solución aproximada con el método Runge-Kutta orden 2, tenemos:

$$\frac{dT}{dt} = f(t, T) = -\left(\frac{\text{Ln}(2)}{16}\right) * (T - 20)$$

Aplicando el método de Runge-Kutta orden 2, desde $j = 0$, $t_0 = 16$ min, $T_0 = 70 \text{ °C}$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad k_1 = hf(t_j, T_j) \quad k_2 = hf(t_{j+1}, T_j + k_1) \quad T_{j+1} = T_j + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\text{Para } h = 1 \rightarrow t_1 = t_0 + h = 16 + 1 = 17$$

$$k_1 = hf(t_0, T_0) = (1)f(16, 70) = \left(-\left(\frac{\text{Ln}(2)}{16}\right) * (70 - 20)\right) = -2.16608$$

$$k_2 = hf(t_1, T_0 + k_1) = (1)f(17, 67.83392) = \left(-\left(\frac{\text{Ln}(2)}{16}\right) * (67.83392 - 20)\right) = -2.07224$$

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 70 + \frac{1}{2}(-2.16608 + (-2.07224)) = 67.88084 \text{ °C}$$

(Respuesta)

- c) Usando la solución exacta enunciada, hallamos la temperatura para $t = 17$ min:

$$T(17) = 20 * \left(1 + 5 * (0.5)^{\frac{17}{16}}\right) = 67.88016 \text{ °C}$$

Por lo tanto, el error absoluto es: $\varepsilon_{absoluto} = |67.88084 - 67.88016| = 6.8 * 10^{-4} \text{ °C}$

(Respuesta)