



EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

APELLIDOS Y NOMBRES: _____ CÓDIGO: _____ SECCIÓN: _____ FIRMA: _____	NOTA		FIRMA DOCENTE
	NÚMERO	LETRAS	

INDICACIONES:

1. Duración: 110 minutos.
2. Se permite el uso de 2 hojas de formulario, calculadora científica y/o programable sin internet.
3. **TERMINANTEMENTE PROHIBIDO** usar teléfonos celulares y otros dispositivos electrónicos con acceso a internet.
4. Leer detenidamente cada pregunta y escribe tus respuestas de manera clara y legible, y asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo este claramente justificado.

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1.- (1.0p) Sea el sistema de punto de punto flotante hipotético basado en el estándar de la IEEE-754 con la siguiente estructura de 10 bits: Signo(1), Exponente(4) y Mantisa (5):

- a) Determine el almacenamiento binario del número -100.5 en notación interna (máquina).
- b) Muestre el error relativo porcentual cometido al almacenar el mencionado número.

Solución

a)

$$-100.5 = -1100100.1_{(2)} = -1.10010 \cdot 2^6$$

$$k=4$$

$$\text{bias} = 2^{k-1} - 1 = 7$$

$$6 = E_i - 7$$

$$E_i = 13 = 1101_{(2)}$$

1	1101	10010
---	------	-------

b)

$$\text{número de máquina} = -1.10010 \cdot 2^6 = 100$$

$$\text{Err} = [(100.5 - 100) / 100.5] \cdot 100\% = 0.49\%$$

2.- (1.0p) Sea el sistema lineal $Ax = b$, donde A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$$

a) ¿Es posible predecir la convergencia con la diagonal dominante? Justifique.

Análisis de diagonal dominante

✓ $|1| \geq |0| + |0| \Rightarrow 1 \geq 0$

✗ $|2| \geq |0| + |3| \Rightarrow 2 \geq 3$

✓ $|k| \geq |0| + |3| \Rightarrow |k| \geq 3$ (si y solo si $|k| \geq 3$)

Por lo tanto, la matriz A no es diagonalmente dominante y, como tal, no podemos garantizar la convergencia del método de Jacobi para cualquier valor de k .

b) Usando el criterio del radio espectral ¿para qué valores de k , el método de Jacobi es convergente?

La matriz T es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{k} & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el radio espectral de T , necesitamos encontrar los valores propios de T y tomar el valor absoluto del mayor valor propio (en magnitud).

Calculamos el determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{k} & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{k} & -\lambda \end{vmatrix} \text{ Las raíces son: } \lambda = 0, \lambda^2 - \frac{9}{2k} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{9}{2k}} = \pm \frac{3}{\sqrt{2k}}$$

El radio espectral de T es el valor absoluto del mayor valor propio en magnitud: $\rho(T) = \frac{3}{\sqrt{2k}}$

Para que el método de Jacobi sea convergente, el radio espectral debe ser menor que 1:

$$\frac{3}{\sqrt{2k}} < 1$$

Por lo tanto, el método de Jacobi es convergente si: $k > \frac{9}{2}$

3.- (1.0p) Dada la siguiente tabla:

t	0	t_1	4
y	1	y_1	2

Si el spline cúbico natural para los dos intervalos es:

$$S_0(t) = 1 + (55/24)t - (7/24)t^3 \quad t \in [0, t_1]$$

$$S_1(t) = 3 + (17/12)(t - t_1) - (7/8)(t - t_1)^2 + (7/72)(t - t_1)^3 \quad t \in [t_1, 4]$$

halle el punto (t_1, y_1) .

Solución

$$S_1''(t) = -7/4 + 7/12(t - t_1)$$

$$S_1''(t_1) = -7/4$$

$$S_0''(t) = -7/4t$$

Por continuidad de la segunda derivada:

$$S_1''(t_1) = S_0''(t_1)$$

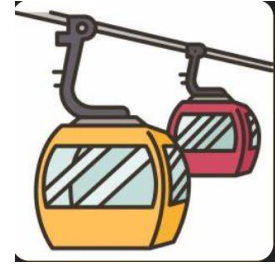
$$t_1 = 1$$

$$S_0(t_1) = 3 = y_1$$

Respuesta: **(1,3)**

4.- (1.0p) La trayectoria de un teleférico está definida por una curva que tiene los puntos $(x, f(x))$ según la tabla que se muestra a continuación:

$x = [0.00,$	$0.25,$	$0.50,$	$0.75,$	$1.00]$
$y = [25.0,$	$22.0,$	$32.0,$	$51.0,$	$75.0]$



Para calcular la longitud de dicha curva se debe usar la integral:

$$L = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{g(x)} dx$$

- a) Determine los parámetros h, p, r, s, t al usar la cuadratura de orden 2 para aproximar la derivada numérica y obtenga el vector de derivadas, D_h .

$$D_h = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 & p \\ 0 & 0 & r & s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

$h = \dots\dots\dots; p = \dots\dots\dots; r = \dots\dots\dots; s = \dots\dots\dots; t = \dots\dots\dots$

$D_h = \dots\dots\dots$

Respuesta: $h = 0.5; p = 1; r = 1; s = -4$ y $t = 3$; aplicando cuadratura de segundo orden.

$D_h = [-38 \ 14 \ 58 \ 86 \ 106]^T$

- b) Estime la longitud del teleférico en $a = 0$ y $b = 1$, usando dos parábolas. Completa los parámetros α, β . (considera 4 cifras decimales)

$g(x): 38.0132 \ 14.0357 \ 58.0086 \ \alpha \ \beta$

$\alpha = \dots\dots\dots$

$\beta = \dots\dots\dots$

$L_{aprox} =$

Respuesta: $\alpha = 86.0058 \ \beta = 106.0047 \ L_{aprox} = 55.0168$

5.- (1.0p) Resuelve la siguiente integral mediante el método de cuadratura de Gauss-Legendre para $n = 3$

$$\int_0^2 t \operatorname{Senh}(t^2) dt$$

Nota:

- Realice un cambio de variable $z = t^2$, antes de aplicar la cuadratura.
- Emplee las raíces y pesos en forma fraccionaria.

Solución:

Paso #1: Se hace un primer cambio de variable: $z = t^2 \rightarrow dz = 2t dt$, $t = 0 \rightarrow z = 0$, $t = 2 \rightarrow z = 4$

$$\int_0^2 t \operatorname{Senh}(t^2) dt = \int_0^4 \frac{\operatorname{Senh}(z)}{2} dz$$

Paso #2: Como el intervalo $[0,4]$ es diferente de $[-1,1]$, se hace el cambio de variable:

$$z = \frac{(b-a)x+(a+b)}{2}, dz = \frac{(b-a)}{2} dx, \text{ donde } a = 0, b = 4 \rightarrow z = 2x + 2, dz = 2dx$$

Al reemplazar:

$$\int_0^4 \frac{\operatorname{Senh}(z)}{2} dz = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Senh}(2x + 2)}{2} 2dx = 2 \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

Donde: $f(x_i) = \frac{\operatorname{Senh}(2x_i+2)}{2}$

Paso #3: Para la cuadratura de Gauss-Legendre ($n = 3$), los pesos c_i y las raíces x_i son:

c_i	$5/9$	$8/9$	$5/9$
x_i	$-\sqrt{3/5}$	0	$+\sqrt{3/5}$

Al reemplazar:

$$\int_{-1}^1 \operatorname{Senh}(2t + 2) dt = 2 \left(\left(\frac{5}{9} \right) * \left(f \left(-2\sqrt{\frac{3}{5}} + 2 \right) \right) + \left(\frac{8}{9} \right) * (f(2)) + \left(\frac{5}{9} \right) * \left(f \left(2\sqrt{\frac{3}{5}} + 2 \right) \right) \right),$$

Resolviendo:

$$\int_0^2 t \operatorname{Senh}(t^2) dt = \mathbf{13.1375} \quad \text{(Respuesta)}$$

6.- (1.0p) En la siguiente EDO de 2° orden con condiciones de frontera:

$$y'' + \ln(1 + xy) * y' + x^3 y^2 = 0$$

Cuya solución pasa por los puntos (0,0) y (0.5,1). Determine el error absoluto (residuo) en el primer disparo para y(0.5), para lo cual debe realizar los siguientes pasos:

a) Evalúe la pendiente inicial s_0 .

Solución:

$$s_0 = \frac{1 - 0}{0.5 - 0} = 2$$

b) Plantee el sistema de EDO 1° orden con valor inicial.

Solución:

Haciendo cambio de variable: $u_1 = y$; $u_2 = y'$, tenemos:

$$F(x, u_1, u_2) = \begin{cases} u_1' = u_2 & u_1(0) = 0 \\ u_2' = -\ln(1 + x u_1) * u_2 - x^3 (u_1)^2 & u_2(0) = s_0 = 2 \end{cases}$$

c) Aplique RK2 como método auxiliar para aproximar y(0.5), usando $h = 0.5$ (a 1 paso).

Solución:

Como nos dice $n = 1$ paso, el valor de h será: $h = \frac{0.5 - 0}{1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$

Aplicando el Método de RK2 (Euler Mejorado), tenemos:

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 0.5$$

$$u^{(0)} = [u_1(0), u_2(0)]^t = [0, 2]^t \rightarrow u^{(1)} = u^{(0)} + \left(\frac{1}{2}\right) * (K_1^{(0)} + K_2^{(0)})$$

$$K_1^{(0)} = h * F(x_0, u^{(0)}) = (0.5) * \begin{bmatrix} u_2(0) \\ -\ln(1 + x_0 * u_1(0)) * u_2(0) - x_0^3 * u_1(0)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2^{(0)} = h * F(x_1, u^{(0)} + K_1^{(0)})$$

$$= (0.5) * \begin{bmatrix} u_2(0) + 0 \\ -\ln(1 + x_1 * (u_1(0) + 1.0)) * (u_2(0) + 0) - x_1^3 * (u_1(0) + 1.0)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.9359 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \left(\frac{1}{2}\right) * (K_1^{(0)} + K_2^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.9359 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.5320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0.5) \\ u_2(0.5) \end{bmatrix}$$

d) Determine el error absoluto (residuo) y comente su resultado.

Solución:

Como $u_1(0.5) = y(0.5) = 1.000$ (Valor aproximado con una iteración del Método del disparo), determinamos el error absoluto respecto al valor de $y(0.5) = 1$

$$Error = |1.000 - 1| = 0 \quad (\text{Respuesta})$$

Comentario: El disparo llega al blanco debido a que la distancia es igual al ancho del paso, sin embargo, se necesitaría más pasos para llegar a la solución precisa.

7.- (1.0p) Complete los comandos faltantes en la siguiente función MATLAB que resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales mediante el método de Newton-Raphson.

$$\begin{cases} x + y^{\ln y} = 6 \\ x^x + y = 30 \end{cases}$$

%Función nw_rphs_senl.m

function [xs,ys] = nw_rphs_senl (x0,y0,tol,max_iter)

%Como referencia, se puede considerar x0 = 3; y0= 3; tol = 1e-8; max_iter = 200

f = _____; **Respuesta: @(x,y) x + y.^log(y) - 6**

g = @(x,y) x.^x + y - 30;

%Derivadas parciales

df_dx = @(x,y) 1;

df_dy = _____; **Respuesta: @(x,y) 2*log(y).*y.^(log(y)-1)**

dg_dx = @(x,y) x.^x.*(1+log(x));

dg_dy = @(x,y) 1;

for i = 1:max_iter

fx = f(x0,y0); gx = g(x0,y0);

J = [df_dx(x0,y0) df_dy(x0,y0) ; dg_dx(x0,y0) dg_dy(x0,y0)]; **%Matriz Jacobiana para Newton**

delta_xy = _____; **Respuesta: -J\[fx;gx]**

x0 = x0 + delta_xy(1);

y0 = y0 + delta_xy(2);

if _____ **Respuesta: norm([fx;gx]) < tol**

break;

end

end

xs = x0;

ys = y0;

fprintf('Solución encontrada es:\n');

fprintf('x = %.8f\n',xs);

fprintf('y = %.8f\n',ys);

8.- (1.0p) Sea la EDO con el problema del valor frontera no lineal.

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = 0, y(4) = -2 \end{cases}$$

Implemente en MATLAB el método del disparo para resolver la EDO hasta que alcance la tolerancia de la función fzero para iterar la pendiente correcta. Complete lo que falta.

global a b N y0 B

a=0; b=4; h=0.1; y0=0; B=-2;

N=(b-a)/h

% s0 pendiente inicial

s0=_____ **Rpta: (B-y0)/(b-a)**

% Código para resolver la EDO usando Euler y la fzero para iterar la pendiente.

[t,y]=eulers(@dydt, a, b, N, [y0 ; fzero(@res, s0)]);

residuo=_____ **Rpta: (y(end,1)-B)**

plot(t,y)

%Función del lado derecho de la EDO

function dy = dydt(t,y)

dy=_____ **Rpta: [y(2); -abs(y(1))];**

end

%Código para el residuo

function r=res(s0)

global a b N y0 B

[x,y]=eulers(_____) **Rpta: @dydt, a,b,N, [y0 ;s0];**

r=y(end,1)-B;

end

%Método de Euler para Sistemas

function[x,U]=eulers(F,a,b,N,u0)

U=[u0']; u=u0;

h=(b-a)/N;

x=(a:h:b)';

for i=1:N

u=_____ **Rpta: u + h*F(x(i),u);**

U=[U; u'];

end

end

PARTE II

Problema 1

Se dispone de dos barras conectadas en sus extremos, con longitudes L_1 y L_2 , y los ángulos que forma con la horizontal son θ_1 y θ_2 respectivamente. Las ecuaciones de equilibrio para este sistema pueden ser no lineales y se pueden expresar como:

$$L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) = 1.5$$

$$L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) = 1.2$$

de las dos barras. Estas ecuaciones representan el balance de las componentes horizontal y vertical de la posición del punto de conexión entre las dos barras. Considere: $L_1 = 2m$ y $L_2 = 1m$.

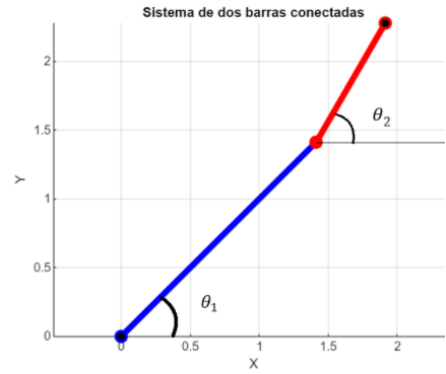


Fig. 1 Sistema de dos barras conectadas.

Se pide para resolver este problema:

a) (1.0p) Defina el sistema $F(\mathbf{X}) = 0$ y sus derivadas para usar el método de Newton.

$$F = \begin{bmatrix} 2 \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) - 1.5 \\ 2 \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) - 1.2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -2 \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) \\ 2 \cos(\theta_1) & +\cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

b) (1.0p) ¿Cuál de los puntos iniciales elegiría $\mathbf{x}^{(0)} = [0, \pi]^T$, $\mathbf{x}^{(0)} = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^T$, $\mathbf{x}^{(0)} = [\frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{2}]^T$?

Justifique su respuesta.

1. caso $\mathbf{x}^0 = [0, \pi]^T$, obtenemos un Jacobiano singular.

$$J = \begin{bmatrix} -2 \sin(0) & -\sin(\theta_2) \\ 2 \cos(0) & +\cos(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. caso $\mathbf{x}^0 = [\pi/4, \pi/4]^T$, obtenemos un Jacobiano singular.

$$J = \begin{bmatrix} -2 \sin(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ 2 \cos(\pi/4) & +\cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

3. caso $\mathbf{x}^0 = [\pi/100, \pi/2]^T$, obtenemos un Jacobiano **no singular**.

$$J = \begin{bmatrix} -2 \sin(\pi/100) & -\sin(\pi/2) \\ 2 \cos(\pi/100) & +\cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0628 & -1 \\ 1.9990 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se escoge el tercer caso.

- c) (2.0p) Realice 02 iteraciones con el punto elegido, garantizando la convergencia de Newton. ¿Cuántas cifras significativas exactas presentan sus resultados? Considere la norma 2 en el cálculo del error relativo.

Solución:

Iteración 1:

$$\begin{aligned} J(X^{(0)})\Delta x &= -F(X^{(0)}) \\ \begin{bmatrix} -0.0628 & -1 \\ 1.9990 & 0 \end{bmatrix} \Delta x &= \begin{bmatrix} 0.4990 \\ -0.1372 \end{bmatrix} \\ \Delta x &= \begin{bmatrix} 0.0686 \\ 0.4947 \end{bmatrix} \\ X^{(1)} &= X^{(0)} + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.100 \\ 2.0655 \end{bmatrix} \\ \text{Error} &= \|\Delta x\|_2 = 0.4994 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \text{Error} / \|X^{(1)}\|_2 = 0.2415$$

Iteración 2:

$$\begin{aligned} J(X^{(1)})\Delta x &= -F(X^{(1)}) \\ \begin{bmatrix} -0.1997 & -0.8801 \\ 1.9900 & -0.4748 \end{bmatrix} \Delta x &= \begin{bmatrix} 0.0152 \\ -0.1201 \end{bmatrix} \\ \Delta x &= \begin{bmatrix} 0.0612 \\ 0.0034 \end{bmatrix} \\ X^{(2)} &= X^{(1)} + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.1612 \\ 2.0689 \end{bmatrix} \\ \text{Error} &= \|\Delta x\|_2 = 0.0613 \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \text{Error} / \|X^{(2)}\|_2 = 0.0295 < 3 * 10^{-2} \leq 5 * 10^{-n}$$

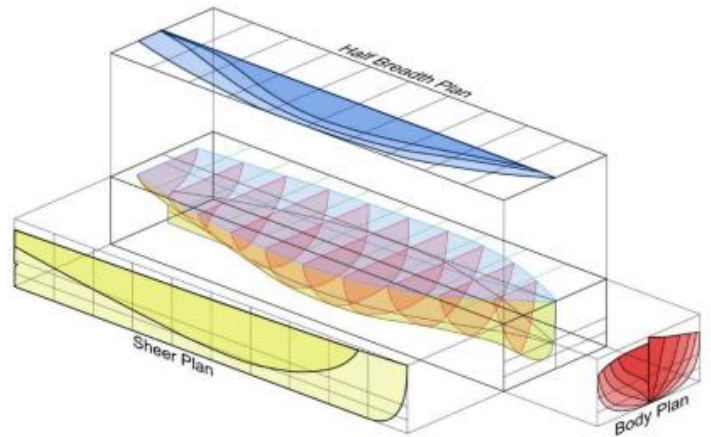
$$n = 2$$

por lo tanto, dos cifras significativas exactas.

Problema 2

En el diseño del casco de un buque, el semi-plano horizontal de flotación (Hull Breadth Plan) es aquella región que es formada debajo de la curva de agua y encima de una línea horizontal denominada crujía, y una de esas curvas de agua pasa por los puntos de la siguiente tabla (los datos están en metros):

i	0	1	2	3	4
x_i	0	4	8	12	16
y_i	0	5	6	3	0



Para este caso:

- a) (2.0p) Halle el polinomio de interpolación a los puntos que pasan por la curva de agua, usando el método de Lagrange.

Solución:

Con los datos de la tabla, determinamos el polinomio interpolante de Lagrange:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i * l_i(x)$$

Donde: $l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j < n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$; además: $y_0 = 0$; $y_1 = 5$; $y_2 = 6$; $y_3 = 3$; $y_4 = 0$

Hallando los coeficientes $l_i(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x - 4)(x - 8)(x - 12)(x - 16)}{(0 - 4)(0 - 8)(0 - 12)(0 - 16)} = \frac{(x - 4)(x - 8)(x - 12)(x - 16)}{6144}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 8)(x - 12)(x - 16)}{(4 - 0)(4 - 8)(4 - 12)(4 - 16)} = \frac{-(x)(x - 8)(x - 12)(x - 16)}{1536}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0)(x - 4)(x - 12)(x - 16)}{(8 - 0)(8 - 4)(8 - 12)(8 - 16)} = \frac{(x)(x - 4)(x - 12)(x - 16)}{1024}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 0)(x - 4)(x - 8)(x - 16)}{(12 - 0)(12 - 4)(12 - 8)(12 - 16)} = \frac{-(x)(x - 4)(x - 8)(x - 16)}{1536}$$

$$l_4(x) = \frac{(x - 0)(x - 4)(x - 8)(x - 12)}{(16 - 0)(16 - 4)(16 - 8)(16 - 12)} = \frac{(x)(x - 4)(x - 8)(x - 12)}{6144}$$

Reemplazando en el polinomio de Lagrange:

$$L(x) = y_0 * l_0(x) + y_1 * l_1(x) + y_2 * l_2(x) + y_3 * l_3(x) + y_4 * l_4(x)$$

Donde:

$$y_0 * l_0(x) = (0) * \left(\frac{(x - 4)(x - 8)(x - 12)(x - 16)}{6144} \right) = 0$$

$$y_1 * l_1(x) = (5) * \left(\frac{-(x)(x-8)(x-12)(x-16)}{1536} \right)$$

$$y_2 * l_2(x) = (6) * \left(\frac{(x)(x-4)(x-12)(x-16)}{1024} \right) = (9) * \left(\frac{(x)(x-4)(x-12)(x-16)}{1536} \right)$$

$$y_0 * l_0(x) = (3) * \left(\frac{-(x)(x-4)(x-8)(x-16)}{1536} \right)$$

$$y_0 * l_0(x) = (0) * \left(\frac{(x)(x-4)(x-8)(x-12)}{6144} \right) = 0$$

Entonces:

$$L(x) = y_1 * l_1(x) + y_2 * l_2(x) + y_3 * l_3(x)$$

Factorizando y reduciendo:

$$L(x) = \left(\frac{(x)(x-16)}{1536} \right) * (-5(x-8)(x-12) + 9(x-4)(x-12) + 3(x-4)(x-8))$$

$$L(x) = \frac{x^4 - 24x^3 - 16x^2 + 2304x}{1536}$$

(Respuesta)

- b) **(1.5p)** Determine el área (usando Simpson Compuesto 3/8, n = 6 particiones) del semi-plano de flotación formado por la curva de agua representada por el polinomio obtenido en a).

Solución:

Teniendo el polinomio de interpolación de Lagrange, calculamos el área del semi-plano de flotación usando el método de Simpson 3/8, donde $n = 3$, en este caso: $n = 6$, $a = 0$ y $b = 16$.

$$\text{Por tanto: } h = \frac{b-a}{n} = \frac{16-0}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Además: } x_j: x_0 = 0; x_1 = 8/3; x_2 = 16/3; x_3 = 8; x_4 = 32/3; x_5 = 40/3; x_6 = 16$$

Entonces:

$$\int_0^{16} L(x) dx \approx \frac{3h}{8} * (L(0) + 3 * L\left(\frac{8}{3}\right) + 3 * L\left(\frac{16}{3}\right) + 2 * L(8) + 3 * L\left(\frac{32}{3}\right) + 3 * L\left(\frac{40}{3}\right) + L(16))$$

Reemplazando y resolviendo:

$$\int_0^{16} L(x) dx \approx \mathbf{58.47 m^2}$$

(Respuesta)

- c) **(0.5p)** Estime el error del método de integración usado y comente su resultado.

Solución:

El error del método de Simpson Compuesto 3/8 es:

$$E = \left| -\frac{b-a}{80} * h^4 * f^{IV}(\varepsilon) \right|$$

Siendo:

$$f^{IV}(x) = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{x^4 - 24x^3 - 16x^2 + 2304x}{1536} \right) = \frac{1}{64}$$

$$\text{Al reemplazar: } E = \left| -\frac{16-0}{80} * \left(\frac{8}{3}\right)^4 * \left(\frac{1}{64}\right) \right| = \mathbf{0.158} \quad \text{(Respuesta)}$$

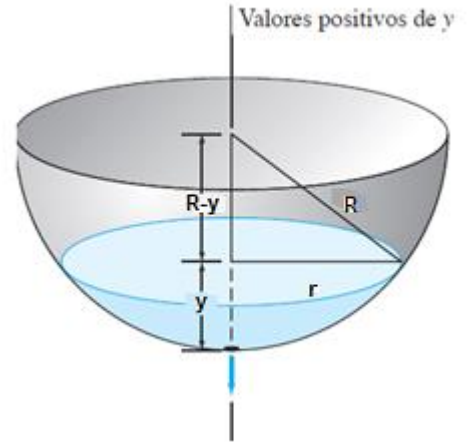
Comentario: Se requiere de más puntos que pasen por la curva de agua para mayor precisión.

Problema 3

Un tanque semiesférico tiene un radio superior de $R=1.2$ m y en el tiempo $t= 0$ segundos está lleno de agua. En ese momento se le hace un orificio circular con un diámetro de $d=10$ cm en el fondo del tanque. Se desea determinar cuánto tiempo tomará a toda el agua salir del tanque. Se sabe que el sistema obedece a la ley de Torricelli:

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

Donde a es el área del orificio, $A(y)$ el área transversal horizontal del tanque a la altura y , considerando $g=9.8$ m/s^2 (aceleración de la gravedad). **Nota:** Trabajar las unidades en el S.I.



a) **(1.0p)** Plantear la EDO con su condición inicial.

Solución

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-a\sqrt{2gy}}{A(y)} = \frac{-\pi \cdot 0.05^2 \sqrt{19.6 y}}{\pi(2.4y - y^2)} = \frac{-0.0025 \sqrt{19.6}}{(2.4y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-0.011068}{(2.4y^{1/2} - y^{3/2})} \quad y(0) = 1.2$$

b) **(2.0p)** Determine el tiempo de vaciado usando el método de Euler con un paso de $h=20$ segundos.

Solución

El vaciado total ocurre cuando $y = 0$ m.

- $t_0=0$
- $y_0=1.2$
- $h=0.20$
- $t_{i+1}=y_i+h$

$$y_{i+1} = y_i + h * \frac{-0.011068}{(2.4y_i^{1/2} - y_i^{3/2})}$$

t	y
0	1.2000
20.0000	1.0316
40.0000	0.8723
60.0000	0.7172
80.0000	0.5619
100.0000	0.4012
120.0000	0.2264
140.0000	0.0123
160.0000	-0.8228

El tanque se queda vacío en aproximadamente **140 segundos**

- c) **(1.0p)** Determine el error relativo comparando el valor aproximado de b) con el valor teórico y comente su resultado.

Solución

Separando variables e integrando, cuando $y=1.2$,

$$\int_0^{1.2} \left(2.4y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \int_0^t -0.011068 dt$$

$$t = 133.0215 \text{ (5.24%)}$$

Comentario: Podría mejorar la precisión con un paso de menor valor (por ejemplo, $h = 1$ segundo).