UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA | P.A.: 2024-2

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES | Fecha: 20/12/24

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODO NUMÉRICOS (MB536)

APELLIDOS Y NOMBRES:	NOTA		FIRMA DOCENTE
___________________	NÚMERO	LETRAS	
CÓDIGO: ____________ SECCIÓN: ____ FIRMA: ____________			

Coordinador del curso: Ing. Robert Castro Salguero

INDICACIONES

1. Duración: 110 minutos.
2. Revisar que estén completas las hojas del examen. Verificar que haya las 04 preguntas de la Parte I y 04 preguntas de la parte II
3. Se permite el uso de 04 hojas de formulario tamaño A4, sin solucionarios, calculadoras científicas y/o programable sin internet.
4. Prohibido el uso de celulares y medios de comunicación electrónica y calculadoras con Wi-Fi o Bluetooth.
5. Escribe tus respuestas de manera clara y legible y asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo esté claramente justificado.

PROFESORES DEL CURSO:

ROSA GARRIDO /HERMES PANTOJA/MAXIMO OBREGON/ROBERT CASTRO

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I

1. **(1.0Pt.)**
   La expansión en **serie de Taylor** de la función $\sin(x)$ está dada por:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

   a) Usando únicamente los **tres primeros términos** de la expansión de Taylor, aproxima el valor de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
   b) Compare el resultado obtenido con el valor exacto $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.7071067812$ y calcule el **error absoluto**.
   c) Justifique si la aproximación tiene **4 cifras significativas** con respecto al valor exacto.

Solución

Realizamos los siguientes cálculos:

a) Calculamos el valor aproximado tomando los primeros tres términos de la serie:

   Valor aproximado de sen(π/4) = 0.7071430458

   Valor exacto sen(π/4) = 0.7071067812

b) Error_Absoluto=0.00003626479

c) Para el cálculo de las cifras significativas:

   $(|0.7071430458-0.7071067812|)/|0.7071067812|<5\times10^{-t}\rightarrow t=4$

   Por lo tanto, presenta 4 cifras significativas 0.7071

2. (1.0Pt.)

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 30 & -5 \\ -12 & -31 & 15 \\ 27 & -1 & 21 \end{bmatrix}$$

utilizando el teorema de Gerschgorin, determine el intervalo en el que se encuentra la parte real de los autovalores de la matriz A.

solución

λ_1=-6±35

λ_2=-31±27

λ_1=21±28

-31-27=-58

21+ 28=49

Por lo tanto: la parte real de los autovalores se encuentran en el intervalo [-58;49]

3. **(1.0Pt.)**

Se da la siguiente fórmula de cuadratura:

$$Q(f) = wf\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + wf\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

donde $w \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, que aproxima la integral definida:

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Se pide deducir los valores de w y α de manera que la fórmula de cuadratura tenga grado de exactitud al menos 3.

Solución

Debe ser exacta hasta polinomios de grado 3: $\psi(x) = \{1, x, x^2, x^3\}$. Usando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \psi(x)\,dx = wf\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + wf\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

$$\int_0^1 1dx = 1 = w \times 1 + w \times 1 =====> w = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = w \times \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + w \times \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) === \rightarrow w = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = w \times \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + w \times \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^2 === \rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Se comprueba que para la integral: $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{1}{4}$ y es exacta.

4. **(1.0Pt.)**
Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden con condiciones iniciales:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y,\ y(1) = 2,\ \frac{dy}{dx}(1) = 3,\ \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 4$$

Se desea estimar los valores de $y(1.05), \frac{dy}{dx}(1.05), \frac{d^2y}{dx^2}(1.05)$, usando el método de Taylor de orden 2 con un paso $h = 0.05$.

Complete el siguiente código MATLAB para implementar el método:

```
x(1)=1,y(1)=2,z(1)=3,w(1)=4,h=0.05

x(2)=x(1)+h

y(2)=y(1)+______________________________________

z(2)=z(1)+______________________________________

w(2)=w(1)+______________________________________
```

x	y	z=y’	w=y”
1	2	3	4
1.05			

Solución

```
% y’=z     z’=w   w’=y         y”=z’=w          z”=w’=y        w”=y’=z
x(1)=1,y(1)=2,z(1)=3,w(1)=4,h=0.05
x(2)=x(1)+h
y(2)=y(1)+h*z(1)+h^2/2*w(1)
z(2)=z(1)+h*w(1)+h^2/2*y(1)
w(2)=w(1)+h*y(1)+h^2/2*z(1)
```

x	y	z=y’	w=y”
1	2	3	4
1.05	**2.155**	**3.2025**	**4.10375**

PARTE II

Problema 1

Considere el flujo isoentrópico de un gas ideal en una tobera, donde el número de Mach M es crucial para determinar la eficiencia del flujo. La relación entre el número de Mach M y el área de la sección transversal A de la tubería se describe mediante la ecuación de continuidad y la ecuación de Bernoulli para un flujo compresible, dada por la fórmula:

$$A = \frac{A^*}{\sqrt{M^2\left(\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}}$$

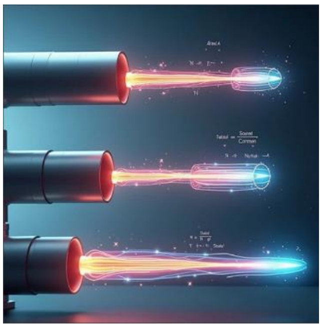

Figura 1 Flujo de gas ideal en una Tobera

Donde:

- A^* es el área crítica.
- γ es la relación de calores específicos del gas.
- M es el número de Mach.

Se tiene los siguientes datos con sus respectivos errores:

- $A^* = 0.02 \pm 0.0002\ \mathrm{m}^2$.
- $\gamma = 1.4$ (sin error)
- $M = 2 \pm 0.05$.

Se pide:

a) **(1 Pts.)** Calcular el valor aproximado de A.

Solución:

Parte (a);

$$A^*_{\text{aprox}} = 0{,}02\ \mathrm{m}^2 \ \gamma_{\text{aprox}} = 1{,}4 \ M_{\text{aprox}} = 2$$

$$A_{\text{aprox}} = \frac{0{,}02}{\sqrt{2^2\left(\frac{2}{1{,}4+1}\left(1+\frac{(1{,}4-1)}{2}\cdot 2^2\right)\right)^{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}}}}$$

$$A_{\text{aprox}} = 0{,}002963\ \mathrm{m}^2$$

b) **(3 Pts.)** Calcular el valor aproximado del error absoluto de A.

$$\left|\frac{\partial A}{\partial A^*}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{M^2\left(\left(\frac{5}{6}+\frac{M^2}{6}\right)\right)^6}}\right| = 0.1481$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial M}\right| = \left|-\frac{\text{Ao}\left(2M\left(\frac{M^2}{6}+\frac{5}{6}\right)^6+2M^3\left(\frac{M^2}{6}+\frac{5}{6}\right)^5\right)}{2\left(M^2\left(\frac{M^2}{6}+\frac{5}{6}\right)^6\right)^{\frac{3}{2}}}\right| = 0.005432$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\Delta A = \sqrt{\left|\frac{\partial A}{\partial A^*}\right|^2 \Delta A^{*2} + \left|\frac{\partial A}{\partial M}\right|^2 \Delta M^2}$$

Error obtenido (Fórmula estándar) :

$$\Delta A = 0.00027322 \text{ m}^2$$

Cota de Error máximo (Fórmula conservadora) :

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial M}\right| \Delta M + \left|\frac{\partial A}{\partial A^*}\right| \Delta A * = 0.1481\text{x}0.0002+0.005432*0.05$$

$$\Delta A = 0.00030122$$

Problema2

Considerando un sistema mecánico compuesto por dos masas $m_1 = 1\,kg$ y $m_2 = 1\,kg$, unidas por resortes de constantes $k^1 = 100\frac{N}{m}$, $k^2 = 150\frac{N}{m}$ y $k^3 = 200\frac{N}{m}$. Los desplazamientos de las masas respecto a sus posiciones de equilibrio se denotan por $x^1(t)$ y $x^2(t)$. El sistema tiene amortiguamiento despreciable y está gobernado por las ecuaciones diferenciales:

$$m^1 x^{1''} = -k^1 x^1 + k^2(x^2 - x^1)$$
$$m^2 x^{2''} = -k^3 x^2 + k^2(x^1 - x^2)$$

Este sistema representado matricialmente tiene la forma: $MX'' + K\,X = 0$, donde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

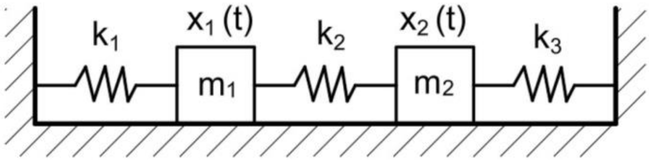

Figura 2 Sistema Masa Resorte

a) **(1.0 Pt.)** Represente matricialmente el sistema de amortiguamiento, reemplazando el valor de M y K.

Solución

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 & -150 \\ -150 & 350 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

b) **(2.0 Pts.)** Si $\omega^2 = \lambda$, donde ω son las frecuencias naturales del sistema y λ son los valores propios de la matriz K, usando el método de la potencia, estime el valor de la mayor frecuencia natural del sistema, partiendo del vector propio $\begin{bmatrix} -150 \\ 200 \end{bmatrix}$ en 3 iteraciones.

Solución:

Normalizando el vector inicial:

$$K = \begin{bmatrix} 250 & -150 \\ -150 & 350 \end{bmatrix}$$

$$X^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} -150 \\ 200 \end{bmatrix}}{200} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$KX^{(0)} = \begin{bmatrix} -337.5 \\ 462.5 \end{bmatrix} = \lambda^{(1)} X^{(1)} = 462.5 \begin{bmatrix} -0.7297 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$KX^{(1)} = \begin{bmatrix} -332.4324 \\ 459.4595 \end{bmatrix} = \lambda^{(2)} X^{(2)} = 459.4595 \begin{bmatrix} -0.7235 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$KX^{(2)} = \begin{bmatrix} -330.8824 \\ 458.5294 \end{bmatrix} = \lambda^{(3)} X^{(3)} = 459.5294 \begin{bmatrix} -0.7216 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La mayor frecuencia natural ω = 21.4133

c) (1.0 Pt.) Calcule el error relativo del item b).

solución

Aplicando $|K - \lambda I| = 0$

$$\lambda = (141.8861;\ \ 458.1139)$$

Por lo tanto, el mayor $\omega = 21.4036$

Er rel= (21.4133-21.4036) *100/21.4036= 0.0453%

Problema 3

Un **disco de freno** está fabricado con materiales que disipan el calor de manera eficiente, como acero o compuestos cerámicos. Cuando un vehículo frena, el disco alcanza temperaturas muy elevadas debido a la conversión de **energía cinética en calor**. Posteriormente, al cesar el frenado, la temperatura del disco disminuye gradualmente por **intercambio de calor con el aire circundante**.

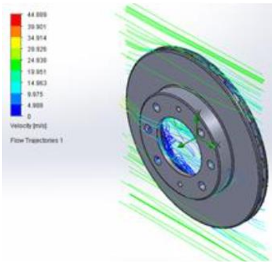

Figura 3 Enfriamiento de un disco de freno.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50
Temperatura (°C)	200	158	126	104	88	75

a) **(2.0 Pts.)** Ajusta un modelo de regresión de la forma:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-kt}$$

donde T_∞ es la temperatura ambiente ($T_\infty = 25°C$).

- Calcula la ecuación sobre determinada, la **ecuación normal** y obtén los coeficientes de la función de regresión lineal.

Solución

a)

X=t (s)	0	10	20	30	40	50
T (° C)	200	158	126	104	88	75
T-25	175	133	101	79	63	50
Y=ln(T-25)	5.1648	4.8903	4.6151	4.3694	4.1431	3.9120

$$Y = c_1X + c_2$$

Ec. Sobredeterminada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \\ 20 & 1 \\ 30 & 1 \\ 40 & 1 \\ 50 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix}$$

Ec. Normal

$$\begin{bmatrix} 5500 & 150 \\ 150 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 633.6159 \\ 27.0949 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.025 \\ 5.1409 \end{bmatrix}$$

b) **(1.0 Pt.)** Determina los coeficientes T_0 y k, y valida el modelo utilizando el factor de regresión R^2.

Utiliza la función de regresión lineal. Se conoce que la **varianza de** $Y = \ln(T - T_\infty)$ es igual a **0.2192**.

Solución

b) $k_1 = c_1 = -0.025$ $(T_0 - T_\infty) = e^{c_2}$ → $T_0 = e^{c_2} + 25$=195.9

$Yest = -0.025X + 5.1409$

Y_{est}	5.1409	4.8909	4.6408	4.3908	4.1408	3.8907

$Y_{med} = \frac{1}{6}\sum Y_i = 4.5158$ $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum(Y_{est} - Y_{med})^2 = 0.2188$

$R^2 = \frac{0.2188}{0.2192} = 0.9982$, es un buen ajuste.

Nota:

$$R^2 = \frac{\mathrm{var}(Y_{\mathrm{est}})}{\mathrm{var}(Y)}, \qquad \mathrm{var} = \sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum (Y_{\mathrm{est}} - Y_{\mathrm{med}})^2.$$

c) **(1.0 Pt.)** Predice la temperatura del freno en $t = 5$ minutos utilizando el modelo ajustado y comenta tus resultados.

Solución

c) $T(t = 300) = 25 + (195.9 - 25)e^{-0.025(300)} \approx 25°C$

Es decir, el disco de freno se habrá enfriado a la temperatura del ambiente.

Problema 4 [RC]

Una viga de longitud L=1 m., empotrada en el extremo izquierdo (deflexión y pendiente nula) está sometida a una carga distribuida uniforme de w=500 N/m., como se observa en la Figura 4:

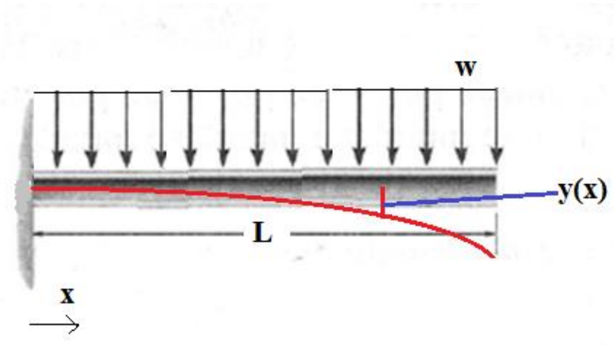

Figura 4 Curva elástica de una viga

Datos:

E=10 GPa (Módulo de elasticidad del material)

$I=10^{-5}$ m^4 (Momento de inercia de la sección transversal).

El momento flector está dado por:

$$M(x) = -250(1-x)^2$$

Se sabe por resistencia de materiales que la deflexión y(x) puede ser obtenida al resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Se pide:

a) **(2.0 Pts.)** Utilizando el método de Euler, determine la deflexión para x=0.25, 0.5, 0,75 y 1.

Solución

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-250(1-x)^2}{10^5} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

Reduciendo a sistema de 1er orden:

y'=z y(0)=0

z'=$\frac{-250(1-x)^2}{10^5}$ z(0)=0

Euler

$x_0=0 \quad y_0=0 \quad z_0=0 \quad h=0.25$

Para n=1,2,3 y 4

$x_{n+1}=x_n+h$

$y_{n+1}=y_n+h\, z_n$

$z_{n+1}=z_n+h\left(\frac{-250(1-x_n)^2}{10^5}\right)$

x	y	z=y'
0	0	0
0.25	0	-0.000625
0.5	-0.00015625	-0.0009765625
0.75	-0.000400390625	-0.0011328125
1.0	-0.00068359375	-0.001171875

b) **(1.0 Pt.)** Determine la máxima pendiente y máxima deflexión en magnitud de la viga, así como sus ubicaciones.

Solución

La máxima deflexión es -0.00068359375
La máxima pendiente es -0.001171875

Ambas ocurren en el extremo derecho cuando x=1.

c) **(1.0 Pt.)** Compare sus resultados con la solución analítica dada por:

$$y(x)=-\frac{x^4}{4800}+\frac{x^3}{1200}-\frac{x^2}{800}$$

Calcule el error relativo porcentual respecto a los valores obtenidos en el inciso b) y comente sus resultados.

Solución

Valores teóricos:

ymax = -0.000625
Error = 9.375%
y'max = -0.000833
Error = 40%
Los errores son aún grandes, pero se podría mejorar usando un paso más pequeño o usar Taylor de orden mayor.