## EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536-2025-I)

**PARTE I**

Responda siguientes preguntas:

1. **(1 P)** Una computadora utiliza una representación de números en punto flotante de 10 bits bajo el estándar IEEE-754 simplificado, con 4 bits para el exponente.
   Importante: Si se requiere redondeo, debe aplicarlo según la precisión disponible. Exprese los resultados en forma decimal exacta o como fracciones si es necesario.
   Complete la siguiente tabla para cada número dado:

| Número | Notación punto flotante | Notación de máquina | Notación decimal |
|---|---|---|---|
| $-17.8$ | $-(1.00100)2^4$ | **1 1011 00100** | $-18$ |
| **100*épsilon** | $(1.10010)2^1$ | 0 **1000 10010** | 3.125 |

2. **(1 P)** Considere la siguiente proposición:

   *"El método de eliminación de Gauss sin pivoteo siempre puede aplicarse para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales que tenga el mismo número de ecuaciones y variables, independientemente de las características de la matriz de coeficientes."*

   Indique si esta proposición es verdadera (V) o falsa (F) y justifique su respuesta de manera clara y fundamentada.

   **Solución**

   - El método de Gauss *con pivoteo* puede resolver cualquier sistema cuadrado *si* solo es posible cuando ningún pivote se anula durante el proceso.

- Conclusión: La proposición es falsa porque el método de Gauss sin pivoteo no puede manejar sistemas con pivotes cero o matrices singulares, lo que contradice la afirmación "sin importar la naturaleza de la matriz".

3. **(1 P)** Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

utilice el método de la potencia para estimar el autovalor dominante y su autovector asociado. Comience con el vector inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, realice 02 iteraciones. Muestre el autovalor $\lambda$ y su autovector asociado en la segunda iteración. ¿Cuál sería el error relativo estimado en la segunda iteración?

Nota: Usar norma euclidiana.

**Solución:**

Iteración numero 1

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{lambda} \approx 6 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5/6 \\ 4/6 \end{bmatrix}$$

Lam=6.0 x=1.00000 0.83333 0.66667

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5/6 \\ 4/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/6 \\ 25/6 \\ 19/6 \end{bmatrix} \quad \text{lambda} \approx 33/6 = 5.5 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 25/33 \\ 19/33 \end{bmatrix}$$

Iteración numero 2 A*x=5.50000 4.16667 3.16667

Lam=5.5 x=1.00000 0.757576 0.575758

Delta =0.0857 (8.6%) con norma euclidiana, y aproximadamente 9% con norma infinita.

4. **(1 P)** Se desea resolver un sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, usando el método iterativo:
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Tx} + \boldsymbol{C}$, donde:
$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{wL})^{-1}((\boldsymbol{1} - \boldsymbol{w})\boldsymbol{D} + \boldsymbol{wU})$ y $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{wL})^{-1}\boldsymbol{b}$
El siguiente programa en MATLAB permite evaluar el **valor óptimo de ω** en un intervalo determinado, con el objetivo de **minimizar el número de iteraciones** requeridas para alcanzar una tolerancia dada.
**Complete el programa** MATLAB para implementar esta búsqueda del ω óptimo.

```
A=[3 1;1 5]; b=[3; 2];

D=diag(diag(A))

L=D-tril(A)

U=D-triu(A)

TOL=1e-14; tabla=[];

for w=0.8:0.01:1.7

   x=zeros(size(b));

   T=inv(D-w*L)*((1-w)*D+w*U);

   C=w*inv(D-w*L)*b;

   for i=1:100

     xn=T*x+C;

     err=norm(xn-x,Inf); % estima error

     x=xn;

     if err<TOL  % Condición de parada

        break

     end

   end

   tabla=[tabla; w i];  % almacena w y el número de iteraciones

end

disp(tabla)

plot(tabla(:,1),tabla(:,2),'*') % Grafica w vs Numero de iteraciones

grid

xlabel('w'), ylabel('Numero de Iteraciones')

[m,p]=min(abs(tabla(:,2))); wopt=tabla(p,1)
```

## PARTE II

### Problema 1

En un laboratorio de vibraciones se debe confirmar que la frecuencia natural fundamental de flexión de un segmento de brazo robótico en voladizo debe superar el límite de diseño de 100 Hz para que sea aceptable; la frecuencia se aproxima mediante la expresión:

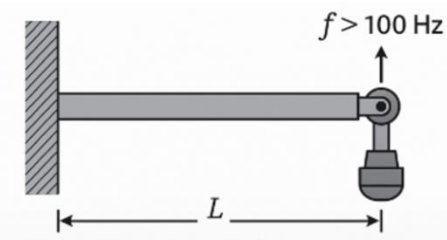


**Figura 1 Brazo Robótico en voladizo**

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,E\,I}{m\,L^3}}$$

donde **E** es el módulo de elasticidad, **I** el momento de área y ***m*** la masa lineal, mientras que la longitud **L** = 1,1 m se considera conocida sin incertidumbre significativa; se han medido: **E** = (215 ±3) × $10^9$ Pa, I = (7,80±0,06) × $10^{-6}$ $m^4$ y ***m*** = (9,40±0,10) kg/m.

Desarrolle lo siguiente:

a) **(2 P)** Escriba la función del máximo error absoluto de f en función de **E, I** y ***m***, usando propagación de errores**.**
b) **(0.5 P)** Estime el máximo error absoluto de f.
c) **(1.5 P)** Determine si el **diseño es aceptable** considerando el margen de error. Justifique con base en el resultado.

**Solución**

Parte a)

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\sqrt{3}I^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{1/2}E^{1/2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\sqrt{3}E^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{1/2}I^{1/2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\sqrt{3}E^{1/2}I^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{3/2}}$$

$$Ef = \frac{\sqrt{3}I^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{1/2}E^{1/2}}\,3*10^9 + \frac{\sqrt{3}E^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{1/2}I^{1/2}}*0.06*10^{-6} + \frac{\sqrt{3}E^{1/2}I^{1/2}}{4\pi L^{3/2}m^{3/2}}0{,}01$$

Parte b) Reemplazando

Ef=1.6291

Parte c)

F aproximado es 100.92, por lo tanto, el valor exacto estaría en el intervalo [99.2949 ;102.5531] como es incierto el valor exacto dentro de ese intervalo, no se puede asegurar que sea mayor que 100 Hz, **por lo tanto no es aceptable**, ya que se debe asegurar que supere toda incertidumbre, esto debido a que valor extremo inferior posible es 99.2949 lo cual es menor al valor de diseño de 100 Hz.

## Problema 2

Los sistemas de masa-resorte tienen numerosas aplicaciones en ingeniería. La Figura 2 muestra un arreglo de tres resortes conectados en serie, comprimidos por una fuerza externa de F=2000 Newtons. En estado de equilibrio, el balance de fuerzas entre nodos es el siguiente:

$$k_2(x_2 - x_1) = k_1\, x_1$$

$$k_3(x_3 - x_2) = k_2(x_2 - x_1)$$

$$F = k_3(x_3 - x_2)$$

Siendo $k_1 = 150\frac{N}{cm}$ $\quad k_2 = 50\ N/cm$ $\quad k_3 = 250\ N/cm$

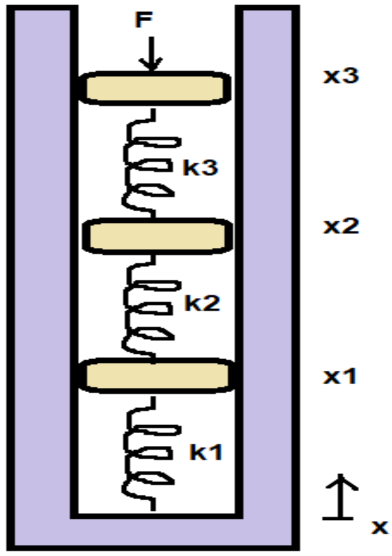


**Figura 2 Sistemas de resortes en serie**

a) **(1 P)** Reescriba el sistema en forma matricial, llevando todos los términos al miembro derecho de cada ecuación. Analice el condicionamiento numérico del sistema si los cálculos se realizan con 6 cifras significativas, y considere el sistema mal condicionado si la pérdida de cifras supera el 50 %.

b) **(1 P)** Verifique si es posible aplicar la factorización de Cholesky.

c) **(1 P)** Realice la factorización **A=LU** de Cholesky si fuera posible, caso contrario aplique otra factorización discutida en clase.

a) **(1 P)** Resuelva los sistemas triangulares obtenidos en c) y comente sus resultados.

**Solución**

**a)**

$$\begin{bmatrix} 200 & -50 & 0 \\ -50 & 300 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$$

Nótese que la fuerza es negativa ya que es opuesta al eje x:

$$k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 34.2996$$

Los dígitos perdidos se pueden aproximar con la siguiente relación:

$$dp = log_{10}k(A) = 1.5353$$

Se espera una pérdida de precisión de 2 dígitos, es decir, 33% de los dígitos empleados, por lo que el sistema está bien condicionado.

**b)**

La matriz es simétrica. Los determinantes de los menores principales son positivos: d1=200, d2=57500 y d3=1.8750e+06. De acuerdo con el teorema del Silvester la matriz es definida positiva, por lo que, si es posible aplicar la factorización de Cholesski.

**c) Aplicando Choleski:**

$$\begin{bmatrix} 200 & -50 & 0 \\ -50 & 300 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14.1421 & 0 & 0 \\ -3.5355 & 16.9558 & 0 \\ 0 & -14.7442 & 5.7104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.1421 & -3.5355 & 0 \\ 0 & 16.9558 & -14.7442 \\ 0 & 0 & 5.7104 \end{bmatrix}$$

**d) Resolviendo los sistemas triangulares:**

Resolviendo el sistema triangular inferior por sustitución directa:

$$\begin{bmatrix} 14.1421 & 0 & 0 \\ -3.5355 & 16.9558 & 0 \\ 0 & -14.7442 & 5.7104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2000 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -350.238 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema triangular superior por sustitución inversa:

$$\begin{bmatrix} 14.1421 & -3.5355 & 0 \\ 0 & 16.9558 & -14.7442 \\ 0 & 0 & 5.7104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -350.238 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.3333 \\ -53.3333 \\ -61.3333 \end{bmatrix}$$

Los valores negativos indican que los tres resortes se desplazan hacia abajo, es decir, contrario al eje x, debido a que están sometidos a una fuerza de compresión.

**Problema 3**

Se tiene un sistema de tres depósitos interconectados que intercambian caudales de entrada y salida de solución, como se muestra en la Figura 3. Las concentraciones de soluto en cada depósito, expresadas en g/L, se denotan como $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$, correspondientes a los depósitos 1, 2 y 3 respectivamente. Los caudales de entrada, salida y transferencia entre depósitos se indican también en la Figura 3.

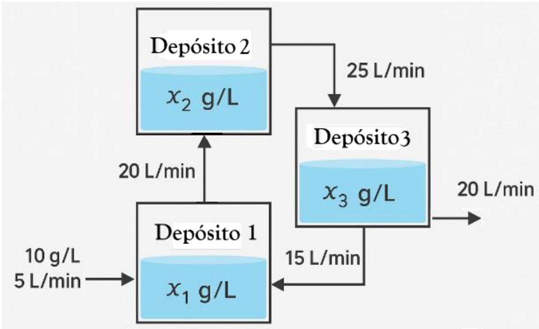


**Figura 3 Sistema de depósitos interconectados**

Se solicita:

a) **(1 P)** Plantee el sistema lineal de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ que describe el balance de masa en estado estacionario para las concentraciones $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$. Justifique claramente el origen de cada término en las ecuaciones.

b) **(1 P)** Analice la convergencia teórica del sistema propuesto respecto a los métodos iterativos vistos en clase (Jacobi y Gauss-Seidel). Determine si ambos métodos convergen y justifique matemáticamente su respuesta.

c) **(1 P)** Utilizando el método iterativo que garantice mayor rapidez de convergencia, realice tres iteraciones a partir del vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = [\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0}]^t$. Muestre el desarrollo completo de cada iteración.

d) **(1 P)** Calcule el error relativo (norma infinita) en la última iteración obtenida para $x^{(3)}$. A partir de este resultado, determine el número de cifras significativas exactas que tiene la solución.

**Nota:**

Balance de ~~caudales~~ en el depósito 1: $\mathbf{50 + 15}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{20}\boldsymbol{x}_1$

Solución

Depósito 1: $50 + 15x_3 = 20x_1$

Depósito 2: $20x_1 = 25x_2$

Depósito 3: $25x_2 = 35x_3$

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & -15 \\ 20 & -25 & 0 \\ 0 & 25 & -35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema presenta diagonal dominante por este motivo garantiza convergencia de ambos métodos, pero más rápido será Gauss Seidel.

Algoritmo de Gauss Seidel:

$x_{1.i+1} = 5/2 + 3/4x_{3,i}$

$x_{2.i+1} = 4/5x_{1,i+1}$

$x_{3.i+1} = 5/7x_{2,i+1}$

$$Itera\ 0: x1 = 0.0000, x2 = 0.0000, x3 = 0.0000$$
$$Itera\ 1: x1 = 2.5000, x2 = 2.0000, x3 = 1.4286$$
$$Itera\ 2: x1 = 3.5714, x2 = 2.8571, x3 = 2.0408$$
$$Itera\ 3: x1 = 4.0306, x2 = 3.2245, x3 = 2.3032$$

$\|x\text{^}(3) - x\text{^}(2)\|\_\infty/\|x\text{^}(3)\|\_\infty \approx 0.1139$

Por lo que en la tercera iteración presentaría redondeo.

**Problema 4**

Supongamos que estamos evaluando el rendimiento térmico, $\eta$ , de un motor, el cual depende de la temperatura $T$ del motor. La relación entre el rendimiento y la temperatura se puede describir mediante la siguiente ecuación no lineal:

$$\eta(T) = \eta_0 - k(T - T_{\text{opt}})^2$$

**Figura 4 Pruebas de rendimiento térmico de un motor**

Donde:

- $\eta_0 = 20\%$ representa el rendimiento máximo teórico del motor a la temperatura óptima.
- $T_{\text{opt}} = 25^\circ C$ es la temperatura óptima a la que el motor opera con máxima eficiencia.
- $k = 0.12 \frac{\%}{^\circ C^2}$ es la constante que describe la pérdida de rendimiento con el alejamiento de $T_{\text{opt}}$.

Se desea encontrar la temperatura $T$ a la cual el rendimiento del motor cae al 15%. Para ello se utilizarán métodos numéricos.

**a) (1 P)** Localice la solución aplicando el teorema de Bolzano, teniendo en cuenta los siguientes intervalos candidatos:

$$[18,19];\ [19,20] \text{ y } [20,21].$$

**b) (1 P)** Realice 02 iteraciones de bisección paso a paso y estime el error, utilizando como intervalo inicial el seleccionado en el ítem anterior.

**c) (1.5 P)** Aplique Newton-Raphson paso a paso, partiendo del punto medio del último intervalo obtenido en b), hasta tener una precisión de $10^{-3}$. Considere el error relativo cometido.

**d) (0.5 P)** Comente sus resultados acerca de la convergencia de los métodos empleados.

**Solución:**

Ecuación del rendimiento:

$$\eta(T) = 20\% - 0.12\%/^\circ C^2 \times (T - 25^\circ C)^2$$

Buscamos T tal que η(T) = 15%.

Parte a) Localización usando Teorema de Bolzano

Reescribimos como función f(T):

$$f(T) = 5 - 0.12(T - 25)^2$$

Evaluación en intervalos:

| Intervalo | f(a) | f(b) | ¿Cambio de signo? |
|---|---|---|---|
| [18,19] | -0.88 | +0.68 | Sí ✓ |
| [19,20] | +0.68 | +2.00 | No |
| [20,21] | +2.00 | +3.08 | No |

**Conclusión:** La raíz está en [18,19].

## Parte b) Método de Bisección (2 iteraciones)

**Iteración 1:**

Intervalo: [18,19]

Punto medio: $T_1 = 18.5$

Nuevo intervalo: [18.5,19]

Error absoluto: $(19-18)/2^1 = 0.5°C$

**Iteración 2:**

Intervalo: [18.5,19]

Punto medio: $T_2 = 18.75$

Nuevo intervalo: [18.5,18.75]

Error absoluto: $(19-18)/2^2 = 0.25°C$

## Parte c) Método Newton-Raphson

Derivada: $f'(T) = -0.24(T - 25)$

**Iteración 1:**

$T_0 = 18.75$

$f(T_0) = 0.3125$

$f'(T_0) = 1.5$

$T_1 = 18.5417$

Error relativo: $|(18.5417-18.75)/18.5417| = 1.12\%$

**Iteración 2:**

$T_1 = 18.5417$

$f(T_1) = -0.0116$

$f'(T_1) = 1.55$

$T_2 = 18.5492$

Error relativo: $|(18.5492-18.5417)/18.5492| = 0.0404\% < 0.1\%$

**Resultado final:** $T \approx 18.5492°C$

Parte d) Análisis de convergencia

| Método | Iteraciones | Error final | Tipo de convergencia |
|---|---|---|---|
| Bisección | 2 | 0.25°C (absoluto) | Lineal (lenta) |
| Newton-Raphson | 2 | 0.0404% (relativo) | Cuadrática (rápida) |

**Conclusiones:**

1. Newton-Raphson fue más eficiente (precisión <0.1% en 2 iteraciones)
2. Bisección garantiza convergencia pero es más lenta
3. La elección de $T_0 = 18.75$ fue adecuada para Newton-Raphson