



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y HUMANIDADES

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

P.A.: 2025-1

Fecha: 18/07/25

Coordinador del curso: Mg. Ing. Rosa Garrido Juárez

Responsable del Examen: Mg. Ing. Robert Castro Salguero

APELLIDOS Y NOMBRES:	NOTA		FIRMA DOCENTE
	NÚMERO	LETRAS	
CÓDIGO: _____ SECCIÓN: _____ FIRMA: _____			

INDICACIONES

- Duración del examen:** 110 minutos.
- Verificación inicial:** Antes de comenzar, **revisa que el puntaje total del examen sume 20 puntos**. Si encuentras alguna inconsistencia, comunícalo de inmediato al docente supervisor.
- Material permitido:** Se permite el uso de hasta **2 hojas tamaño A4 solamente** con fórmulas (formulario personal). Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet**.
- Prohibiciones:** Está estrictamente prohibido el uso de **celulares, medios de comunicación electrónica y calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth**.
- Presentación de respuestas:** Escribe tus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. (1.0P) Considere un sistema hipotético de representación en punto flotante basado en el estándar IEEE-754, compuesto por 10 bits, de los cuales 4 se asignan a la mantisa.
 - a) Expresar la aceleración de la gravedad $g=9.8 \text{ m/s}^2$, en notación binaria, aproximado al número de máquina más cercano.
 - b) Determine el error relativo porcentual que se comete en el almacenamiento.

Solución

a)

$$g=9.8=1001.1100110011\dots=1.0011100110011\dots \times 10^3$$

$$g=1.0100 \times 2^3$$

El más cercano se obtiene por redondeo a 4 bits

$$S=1 \quad E=5 \quad M=4$$

$$\text{Bias}=2^{E-1}-1=15$$

$$E_i-15=3$$

$$E_i=18=10010$$

0	10010	0100
Signo	Exponente	Mantisa

b)

$$g=1.0100 \times 2^3=(1+2^{-2}) \times 2^3=10$$

$$\text{Error}=(9.8-10)/9.8 \times 100=2.04\%$$

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

2. (1.0P) Determine si la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Justifique.

Solución:

Paso 1. Hallar los valores propios de A .

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2.$$

El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)^2.$$

El único valor propio es $\lambda = 4$, con multiplicidad algebraica 2.

Paso 2. Hallar el espacio propio asociado a $\lambda = 4$.

Calculamos:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí, $x_2 = 0$. El espacio propio es:

$$\text{Ker}(A - 4I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

La multiplicidad geométrica es 1.

Paso 3. Conclusión sobre la diagonalización.

- Multiplicidad algebraica de $\lambda = 4$, es igual a 2.
- Multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$, es igual a 1.

Como no coinciden, la matriz A **no es diagonalizable**.

Respuesta Final:

La matriz A no es diagonalizable.

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

3. (1.0P) Encuentre los coeficientes del polinomio de interpolación que aproxima la función $f(x) = \ln(x)$, en los puntos $x = [1, 2, 3, 4, 5]$; mediante un script en Matlab. Complete el siguiente código llenando los espacios en blanco:

```
clear;

% === Datos de entrada ===
x_vals = [1, 2, 3, 4, 5];
y_vals = log(x_vals);

n = length(x_vals); _____
V = zeros(n);

% === Construcción de la matriz de Vandermonde ===
for i = 1:n
    for j = 1:n
        V(i,j) = x_vals(i)^(j-1); _____
    end
end

% === Resolver el sistema lineal ===

a = V \ y_vals' _____
fprintf('Los coeficientes del polinomio son:')
disp(a')
```

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

4. (1.0P) Resolver la siguiente EDO no lineal:

$$y''(t) = -|y(t)| + \sin(t), t \in [0, \pi]$$

con condiciones de frontera:

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

Completar el código de MATLAB para resolver el problema de valor frontera usando el método del disparo (solo una iteración).

% 1. Definir el lado derecho de la EDO como función anónima
% y es un vector columna.

```
f = @(t, y) [ y(2) _____ ;  
             -abs(y(1)) + sin(t) _____ ];
```

% 2. Definir el intervalo de tiempo
tspan = [0 pi];

% 3. Condiciones iniciales: $y(0)=0$, $y'(0)=?$
% Asumir un valor inicial para la pendiente $s_0 = y'(0)$.

```
s0 = _____1/pi_____; % Primer disparo
```

% 4. Resolver la EDO con ode45

```
[t, ysol] = ode45(f, tspan, [0; s0]_____);
```

% 5. Valor obtenido en $t=\pi$
y_pi_obtenido = ysol(end, 1);

% 6. Valor frontera objetivo
y_pi_objetivo = 1;

% 7. Calcular el error

```
residuo = abs(y_pi_obtenido - y_pi_objetivo);_____;
```

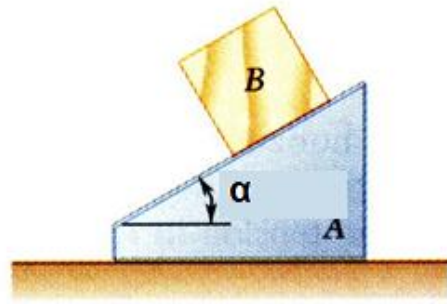
% 8. Mostrar resultados
fprintf('Con $y'(0) = %.4f$, obtenemos $y(\pi) = %.4f$ \n', s0,
y_pi_obtenido);
fprintf('Error respecto al valor frontera: $%.4f$ \n', residuo);

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

PARTE II

Problema 1

El bloque B de masa $m_B=5$ kg. parte desde el reposo y se desliza sobre la cuña A de $m_A=25$ kg. La cuña, a su vez, se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción. Se desprecia la fricción en todas las superficies de contacto. Considere la aceleración de la gravedad $g=9.8$ m/s^2 y un ángulo de inclinación $\alpha=30^\circ$. Ver figura adjunta.



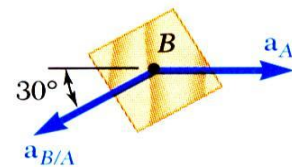
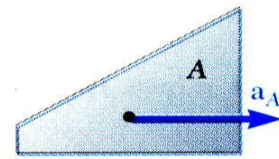
Se desea determinar:

a_A : Aceleración de la cuña respecto al suelo.

$a_{B/A}$: Aceleración del bloque relativa a la cuña.

N_{AB} : Fuerza normal de contacto entre el bloque y a cuña.

N_A : Fuerza normal entre la cuña y el suelo.



- a) **(0.5 P)** Demuestre que, al aplicar la segunda ley de Newton a cada cuerpo en sus respectivos ejes de movimiento, se obtiene el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\cos(\alpha) \\ m_B \sin(\alpha) & 0 & 0 & 1 \\ m_A & 0 & 0 & -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A g \\ m_B g \cos(\alpha) \\ 0 \\ -g \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

- b) **(1.5P)** Sustituya los valores numéricos en el sistema y resuélvalo utilizando el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial por filas hasta obtener un sistema triangular superior.
- c) **(1.5P)** Resuelva el sistema triangular superior por sustitución regresiva para obtener los valores numéricos de las incógnitas.
- d) **(0.5 P)** Calcule la aceleración absoluta del bloque B, a partir de los resultados anteriores usando la ley de cosenos.

Solución

a)

Aplicando la segunda ley de Newton para cada cuerpo y en ambos ejes

$$\sum F_x = m_A a_x$$

$$\sum F_y = 0$$

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

$$\sum Fx' = m_B a_x'$$

$$\sum Fy' = m_B a_y'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\cos(\alpha) \\ m_B \text{sen}(\alpha) & 0 & 0 & 1 \\ m_A & 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A g \\ m_B g \cos(\alpha) \\ 0 \\ -g \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix}$$

b)

Reemplazando valores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.866 \\ 2.5 & 0 & 0 & 1 \\ 25 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0.866 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 245 \\ 42.4352 \\ 0 \\ -4.9 \end{bmatrix}$$

Permutamos la fila 1 y 3:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & -0.5 \\ 2.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.866 \\ 0.866 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 42.4352 \\ 245 \\ -4.9 \end{bmatrix}$$

$$M_{21}=2.5/25=0.1$$

$$F2=F2-0.1*F1$$

$$M_{41}=0.866/15=0.0346$$

$$F4=F4-0.0346*F1$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.05 \\ 0 & 0 & 1 & -0.866 \\ 0 & -1 & 0 & 0.0173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 42.4352 \\ 245 \\ -4.9 \end{bmatrix}$$

Permutamos la fila 2 y 4:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 & 0.0173 \\ 0 & 0 & 1 & -0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.9 \\ 245 \\ 42.4352 \end{bmatrix}$$

c) Aplicando sustitución inversa:

$$\begin{bmatrix} a_A \\ a_{B/A} \\ N_A \\ N_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8083 \\ 5.6 \\ 280 \\ 40.4145 \end{bmatrix}$$

d)

Aplicando ley de cosenos:

$$a_B=(a_A^2+a_{B/A}^2+2 a_A a_{B/A} \cos(150^\circ))^{0.5}=4.9166 \text{ m/s}^2$$

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

Problema 2 En ingeniería estructural, el análisis del pandeo en columnas es crucial para garantizar la estabilidad de sistemas mecánicos sometidos a cargas axiales. Para una columna con una base empotrada y un extremo libre, la carga crítica de pandeo puede aproximarse resolviendo la siguiente ecuación no lineal:

$$f(P) = \tan(\sqrt{P}) - \sqrt{P}$$

donde P representa la carga crítica de pandeo (en kN). Se pide:

- (1 P) Plantee la fórmula de recurrencia del método de Newton-Raphson aplicada a esta ecuación.
- (2 P) Calcule dos iteraciones del método de Newton-Raphson a partir de $P_0 = 70$ y estime la raíz al finalizar la segunda iteración. Use 4 cifras decimales en cada iteración.
- (1 P) Calcule el error relativo porcentual aproximado entre las dos últimas iteraciones. Comente sus resultados acerca de la convergencia, debidamente fundamentado.

Solución

1. Fórmula de recurrencia de Newton-Raphson:

$$P_{n+1} = P_n - \frac{f(P_n)}{f'(P_n)}$$

$$f'(P) = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{P})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{1}{2\sqrt{P}}$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{\tan(\sqrt{P_n}) - \sqrt{P_n}}{\left(\frac{1}{\cos^2(\sqrt{P_n})} - 1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{P_n}}}$$

2. Iteraciones de Newton-Raphson:

$$\text{Iteración 1: } P_1 = 123.7619$$

$$\text{Iteración 2: } P_2 = 130.8360$$

3. Cálculo del error relativo porcentual:

$$\text{Error relativo aproximado} = 5.4068\%$$

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

Problema 3 En un circuito de potencia, una resistencia cilíndrica disipa energía por efecto Joule. La corriente que fluye a través de ella varía a lo largo del eje x , debido a la geometría del material conductor o a efectos de distribución.

La densidad de corriente se modela por la siguiente función:

$$I(x) = 2 + 3x - x^2, \text{ donde } x \in [0, 2] \text{ (en metros)}$$

La potencia disipada por unidad de longitud en un conductor resistivo está dada por:

$$P(x) = R \cdot I(x)^2 \quad [\text{J/m}]$$

donde $R = 1 \Omega/\text{m}$ es la resistencia por unidad de longitud.

Se pide:

- (1.0 P)** Calcule la energía total disipada a lo largo del conductor de 2 metros usando la fórmula de Newton-Cotes cerrada con 2 intervalos (regla de Simpson 1/3).
- (1.0 P)** Aplique la cuadratura de Gauss-Legendre con 2 puntos sobre el intervalo $[0, 2]$ para aproximar la energía total disipada.
- (1.0 P)** Compare los resultados obtenidos en los incisos anteriores. ¿Cuál método proporciona una mejor aproximación a la energía disipada? Sustente su respuesta.
- (1.0 P)** Desde el punto de vista físico, ¿cómo afecta la variabilidad de la corriente al perfil de disipación a lo largo del conductor?

Solución

- a) Se aplica la fórmula de Newton-Cotes de 3 puntos (regla de Simpson 1/3), que tiene la forma:

$$E \approx (h/3) \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \text{ con } h = (b - a)/2.$$

Usando los puntos $x = 0, 1, 2$:

$$I(0) = 2, I(1) = 4, I(2) = 4 \rightarrow P(0) = 4, P(1) = 16, P(2) = 16.$$

Entonces: $E \approx (1/3) \cdot [4 + 4 \cdot 16 + 16] = (1/3) \cdot [84] = 28.0 \text{ J}$.

- b) Aplicamos la cuadratura de Gauss-Legendre de 2 puntos sobre $[0, 2]$. Se utilizan los nodos transformados:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Llevamos esto al intervalo $[0, 2]$:

- Cambio de variable: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = t + 1$, y $dx = 1$
- Evaluamos en $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

Calculamos $I(x)^2$ en ambos puntos:

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

$$1. \quad x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.4226 \qquad I^2(x_1) \approx 9.536$$

$$2. \quad x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.5774 \qquad I^2(x_2) \approx 18.005$$

Entonces:

$$E \approx \frac{b-a}{2} [I^2(x_1) + I^2(x_2)] = \frac{2}{2} (9.536 + 18.005) = 27.56 \text{ J}$$

$$x^1 = 0.4226, x^2 = 1.5774$$

c) El valor exacto de la integral es 27.7333 J.

- Simpson 1/3 da 28.0 J \rightarrow *Error relativo* \approx 0.96%

- Gauss-Legendre (2 puntos) da 27.5555 J \rightarrow *Error relativo* \approx 0.64%

\Rightarrow La mejor aproximación es la de Gauss-Legendre con 2 puntos, porque logra mayor exactitud con menor cantidad de puntos. Esto se debe a que es exacto para polinomios de hasta grado 3, mientras que Simpson lo es hasta grado 3 también, pero con distribución uniforme.

d) La corriente $I(x)$ no es constante: tiene un comportamiento cuadrático. Esto implica que la potencia disipada $P(x) = I(x)^2$ es una función de grado 4. Esta variabilidad hace que la disipación de energía no sea uniforme a lo largo del conductor. Hay zonas con mayor acumulación de calor (donde la corriente es mayor), y otras con menor disipación. Este perfil es importante en ingeniería eléctrica, ya que puede afectar la selección de materiales, aislamiento y refrigeración del sistema.

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

Problema 4 En un crucero turístico se presenta un brote de una infección respiratoria leve. Los pasajeros que se recuperan no adquieren inmunidad duradera, por lo que pueden volver a contagiarse, generando un ciclo continuo de infección y recuperación. Este fenómeno puede representarse mediante el modelo epidemiológico SIS, suponiendo que la población a bordo permanece constante y normalizada, es decir, se cumple en todo momento: $S(t) + I(t) = 1$

El modelo se expresa así:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I.$$

S: La proporción o número de individuos susceptibles.

I: La proporción o número de individuos infectados.

β (beta): La tasa de transmisión, que indica qué tan contagiosa es la enfermedad.

γ (gamma): La tasa de recuperación, que indica qué tan rápido se recuperan las personas.

Durante el inicio del brote, se reportan los siguientes parámetros y condiciones iniciales:

$$\beta = 0.5, \quad \gamma = 0.2; \quad S(0) = 0.90, \quad I(0) = 0.10.$$

- (1.0 P)** Formule explícitamente el sistema de ecuaciones diferenciales para $S(t)$ e $I(t)$ como un problema de valor inicial (PVI) en forma vectorial, es decir, en la forma: $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, donde $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}$
- (2.0 P)** Emplee el método de Runge Kutta de orden 2 (Heun) con un paso $\Delta t = 4$ para aproximar $S(8)$ e $I(8)$. Muestre todos los cálculos redondeando a 4 decimales.
- (1.0 P)** Explique, en el contexto del crucero, qué implicaría que el parámetro γ aumentara significativamente. ¿Cómo afectaría esto al comportamiento del brote y a la proporción de pasajeros infectados en el tiempo?

Solución:

Se tienen:

$$\beta = 0.5, \gamma = 0.2.$$

Sustituyendo en el modelo SIS:

$$\frac{dS}{dt} = -0.5 S I + 0.2 I,$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.5 S I - 0.2 I.$$

Definimos:

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix}.$$

La función vectorial es:

$$F(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -0.5 S I + 0.2 I \\ 0.5 S I - 0.2 I \end{bmatrix}$$

La condición inicial:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix}.$$

Así, el problema de valor inicial queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(-0.5 S + 0.2) \\ -I(-0.5 S + 0.2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix}.$$

Aplicación de RK2 (Heun) con $h = 4$

Iteración 1

$$k_{1S} = 0.1 \cdot (-0.5 \cdot 0.9 + 0.2) = -0.0250,$$

$$k_{1I} = -k_{1S} = 0.0250.$$

$$S^* = 0.9 + 4 \times (-0.0250) = 0.8000,$$

$$I^* = 0.1 + 4 \times 0.0250 = 0.2000.$$

$$k_{2S} = 0.2 \times (-0.5 \times 0.8 + 0.2) = -0.0400,$$

$$k_{2I} = -k_{2S} = 0.0400.$$

$$S_1 = 0.9 + \frac{4}{2}(-0.0250 + -0.0400) = 0.7700,$$

$$I_1 = 0.1 + \frac{4}{2}(0.0250 + 0.0400) = 0.2300.$$

Iteración 2

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

$$k_{1S} = 0.23 \times (-0.5 \times 0.77 + 0.2) = -0.0426,$$

$$k_{1I} = -k_{1S} = 0.0426.$$

$$S^* = 0.7700 + 4 \times (-0.0426) = 0.5996,$$

$$I^* = 0.2300 + 4 \times 0.0426 = 0.4004.$$

$$k_{2S} = 0.4004 \times (-0.5 \times 0.5996 + 0.2) = -0.0400,$$

$$k_{2I} = -k_{2S} = 0.0400.$$

$$S_2 = 0.7700 + \frac{4}{2}(-0.0426 + -0.0400) = 0.6048,$$

$$I_2 = 0.2300 + \frac{4}{2}(0.0426 + 0.0400) = 0.3952.$$

Tabla de Resultados (hasta iteración 2)

t	S	I	k_{1S}	k_{1I}	k_{2S}	k_{2I}
0	0.9000	0.1000	-0.0250	0.0250	-0.0400	0.0400
4	0.7700	0.2300	-0.0426	0.0426	-0.0400	0.0400
8	0.6048	0.3952				

c)

Un aumento significativo de γ implica que los pasajeros infectados se recuperan más rápido. En el contexto del crucero, esto reduciría la duración promedio de la infección en cada persona, disminuyendo la cantidad de pasajeros infectados en un momento dado. Como consecuencia, el brote tendería a ser menos intenso y habría menos personas contagiadas simultáneamente, aunque podrían seguir existiendo casos nuevos porque no se adquiere inmunidad duradera.