



**EXAMEN FINAL  
DE METODOS NUMÉRICOS (MB536)**

Coordinador del curso: Rosa Mercedes Garrido Juárez  
Responsables de la elaboración Rosa Mercedes Garrido Juárez

**NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS**

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL CUADERNILLO MARCAS (TEXTOS O SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO.**

**INDICACIONES:**

1. **Duración del examen:** 110 minutos.
2. **Verificación inicial:** Antes de comenzar, **revise que el puntaje total del examen sume 20 puntos**. Si encuentras alguna inconsistencia, comunícalo de inmediato al docente supervisor.
3. **Material permitido:** Se permite el uso de hasta **2 hojas tamaño A4 solamente** con fórmulas (formulario personal). Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet**.
4. **Prohibiciones:** Está estrictamente prohibido el uso de **celulares, medios de comunicación electrónica y calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth**.
5. **Presentación de respuestas:** Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.



PARTE I

PREGUNTA N°01 (1.0P)

Para resolver un sistema no lineal, se ha propuesto el siguiente esquema iterativo de punto fijo  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ , donde:

$$x^{(k+1)} = g_1(x^{(k)}, y^{(k)}) = \frac{x^{(k)} + \cos(y^{(k)})}{4}$$

$$y^{(k+1)} = g_2(x^{(k)}, y^{(k)}) = \frac{y^{(k)} + e^{-x^{(k)}}}{5}$$

Se desea analizar la convergencia en el punto  $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0$ , complete el siguiente recuadro:

$J_G(x, y)$	$\begin{bmatrix} 0.25 & -0.25\text{sen}(y) \\ -0.2e^{-x} & 0.2 \end{bmatrix}$
$J_G(x^{(0)}, y^{(0)})$	$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$
$L = \ J_G(x^{(0)}, y^{(0)})\ _\infty$	0.4
Según el resultado anterior, ¿se puede garantizar la convergencia del método? Justifique brevemente usando el Teorema del Punto Fijo.	Dado que $L=0.4$ , y observamos que $L<1$ , el mapeo es una contracción en la vecindad de $(0,0)$ , entonces sí se garantiza la convergencia (lineal) del método porque el criterio $\ J_G(0,0)\ _\infty < 1$ , se cumple.



### PREGUNTA N°02 (1.0P)

Se desea diseñar la trayectoria plana a seguir por un brazo robot para que transporte diferentes piezas de un lugar a otro. Dicho mecanismo ha de moverse de una forma suave para que no caigan los elementos transportados, y para que no se dañen las articulaciones. Se ha de diseñar la trayectoria con un número de puntos por los que debe pasar partiendo de un punto inicial que es el origen (0,0), el brazo debe dirigirse al punto (7,6) en donde recogerá una pieza, aunque previamente tendrá que pasar por dos puntos de control, el (2,4) y el (6,4). Finalmente debe llevar hasta el punto (15,1) en donde dejará la pieza en cuestión, pero pasando antes por el punto de control (12,7), escriba un script para graficar la trayectoria de la curva, usando el comando spline del Matlab, con los puntos:

### Solución

```
clear; clc; close all;

% Puntos de la trayectoria (en orden de visita)
% Punto inicial → puntos de control → punto de recogida → punto de
control → destino final

X = [0 2 6 7 12 15];
Y = [0 4 4 6 7 1];

% Construimos splines cúbicos para X(t) y Y(t)
xx = linspace(0,15,100);% muestreamos fino para una curva suave

yy = spline(X, Y, xx);

% Gráfica
figure;
plot(xx, yy, 'LineWidth', 2); %hold on;
%plot(X, Y, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % puntos
%clave
%grid on;
%xlabel('X');
%ylabel('Y');
%title('Trayectoria del brazo robótico usando spline cúbico');
%legend('Trayectoria spline','Puntos de control');
```

### PREGUNTA N°03 (1.0P)



Se aplican tres métodos con 3 puntos para aproximar una integral suave:

- Simpson cerrado
- Simpson abierto
- Gauss–Legendre

Ordene los métodos de menor a mayor precisión esperada y explique brevemente la razón del orden elegido.

### Solución

1. **Gauss–Legendre 3 puntos** (mayor precisión: grado 5).
2. **Simpson cerrado** (grado 3).
3. **Simpson abierto** (a pesar de grado 3 es menos preciso que la cuadratura cerrada de Simpson).

**Justificación:** A mayor grado de exactitud de la fórmula, mayor precisión con el mismo número de puntos.



### PREGUNTA N°04 (1.0P)

Se tiene la ecuación diferencial  $y' = 3t - 2y$ , con  $y(0) = 0.5$  en el intervalo  $t \in [0, 2]$ .

Rellene los 4 espacios en blanco (\_\_\_\_\_) para completar el script funcional.

```
clc; clear; close all;

% 1. Definición del modelo
% Defina la función anónima f(t,y) para la ecuación: y' = 3t - 2y
f = @(t,y) 3*t - 2*y;

% 2. Obtención de la Solución Exacta (Simbólica)
syms y(t) t
% Utilice el comando apropiado para resolver la ecuación simbólicamente.
% Condición: y(0) = 0.5. Nota: Se requiere '==' para la ecuación y la
condición.
y_simb = dsolve(diff(y,t) == 3*t - 2*y, y(0) == 0.5);

% 3. Conversión para evaluación numérica
% Convierta la solución simbólica 'y_simb' a un 'function handle'
vectorizable
% para poder evaluarla numéricamente en el gráfico y cálculo de error.
y_exacta_fun = matlabFunction(y_simb);

% --- INICIO BLOQUE EULER ---
a = 0; b = 2; h = 0.1;
t_euler = a:h:b;
y_euler = zeros(size(t_euler));
y_euler(1) = 0.5;

for i = 1:length(t_euler)-1
    % Fórmula de Euler: y_nuevo = y_actual + h * pendiente
    y_euler(i+1) = y_euler(i) + h * f(t_euler(i), y_euler(i));
end

% --- FIN BLOQUE EULER ---

% 4. Validación con Solver Robusto (ODE45)
% Utilice el solver ode45 para resolver la misma ecuación en el intervalo
% [0, 2] con la condición inicial 0.5.
% Sintaxis: ode45(función, [t_inicio t_fin], y_inicial)
[t_ode, y_ode] = ode45(f, [0, 2], 0.5);

% 5. Cálculo del Error de Euler
% Calcule el error absoluto en el punto final (t=2) comparando el último
valor
% obtenido por Euler contra el valor evaluado en la función exacta.
val_exacto_final = y_exacta_fun(2); % Se evalúa en t=2 (final del
intervalo)
val_euler_final = y_euler(end); % Se toma el último valor del
vector

error_final = abs(val_exacto_final - val_euler_final);
```



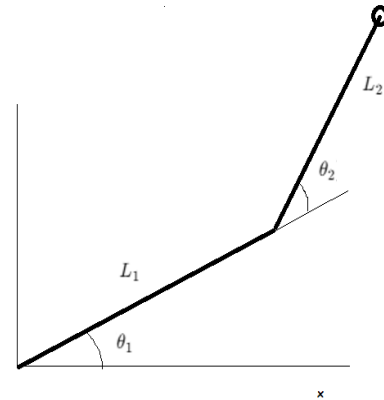
## PARTE II

### PROBLEMA 1

Un brazo robótico plano de dos eslabones se utiliza en una línea de ensamblaje automatizada. La posición del efector final  $(x, y)$  en función de los ángulos de las articulaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (en radianes) se modela mediante las ecuaciones de cinemática directa:

$$x = \text{Suma de proyecciones horizontales}$$

$$y = \text{Suma de proyecciones verticales}$$



Donde las longitudes de los eslabones son  $L_1=30$  cm y  $L_2=20$  cm. Se requiere configurar el robot para que alcance la coordenada objetivo  $(40,20)$  cm.

Se pide:

**a) (1.0 P)** Formule el problema como un sistema de ecuaciones no lineales de la forma  $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$ , donde el vector de incógnitas es  $\mathbf{x}=[\theta_1, \theta_2]^T$ . Determine analíticamente la expresión general de la Matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_F(\theta_1, \theta_2)$  del sistema.

**b) (1.5 P)** Para resolver la configuración necesaria, aplique el Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales. Realice dos iteraciones completas partiendo de la aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [0.25, 0.75]^T$  rad. Debe mostrar explícitamente: El vector de funciones evaluado  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ , la matriz Jacobiana evaluada  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ , el planteamiento del sistema lineal para hallar el incremento  $\Delta\mathbf{x}$ , el valor del nuevo vector aproximado  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  y una estimación de error usando la norma Infinita. Comente sus resultados.

**c) (1.5 P)** Demuestre algebraicamente que el determinante del Jacobiano calculado en el inciso (a) se reduce  $\det(J) = L_1 L_2 \sin(\theta_2)$ . Basado en esta expresión, analice qué sucede con el método numérico si el robot intenta alcanzar una posición donde el brazo está completamente estirado. Justifique su respuesta en términos de estabilidad numérica y significado físico.



**solución**

a) Sistema y Jacobiano:

$$f_1 = 30 \cos(\theta_1) + 20 \cos(\theta_1 + \theta_2) - 40 = 0$$

$$f_2 = 30 \sin(\theta_1) + 20 \sin(\theta_1 + \theta_2) - 20 = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} -30 \sin(\theta_1) - 20 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -20 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 30 \cos(\theta_1) + 20 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 20 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

b) Aplicación de N-R

Datos:

Objetivo: (40,20)

inicio:  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.25; 0.75)^T$

Iteración 1:	Iteración 2:
1. Evaluación de Funciones: $F(\mathbf{x}^{(0)}) \approx \begin{pmatrix} -0.1266 \\ 4.2515 \end{pmatrix}$	1. Evaluación de Funciones: $F(\mathbf{x}^{(1)}) \approx \begin{pmatrix} -0.4574 \\ -0.1242 \end{pmatrix}$
2. Matriz Jacobiana: $J(\mathbf{x}^{(0)}) \approx \begin{pmatrix} -24.2515 & -16.8294 \\ 39.8734 & 10.8060 \end{pmatrix}$	2. Matriz Jacobiana: $J(\mathbf{x}^{(1)}) \approx \begin{pmatrix} -19.8758 & -17.5263 \\ 39.5426 & 9.6348 \end{pmatrix}$
3. Sistema Lineal ( $J\Delta\mathbf{x} = -F$ ): $\Delta\mathbf{x}^{(0)} \approx \begin{pmatrix} -0.1716 \\ 0.2398 \end{pmatrix}$	3. Sistema Lineal: $\Delta\mathbf{x}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 0.0131 \\ -0.0410 \end{pmatrix}$
4. Actualización: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1716 \\ 0.2398 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0784 \\ 0.9898 \end{pmatrix}$	4. Actualización: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0784 \\ 0.9898 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0131 \\ -0.0410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0915 \\ 0.9488 \end{pmatrix}$
5. Estimación de Error (Iteración 1): $E_1 = \ \Delta\mathbf{x}^{(0)}\ _\infty = 0.2398$	5. Estimación de Error (Iteración 2): $E_2 = \ \Delta\mathbf{x}^{(1)}\ _\infty = 0.0410$

El estimador de error decrece rápidamente lo que demuestra la convergencia cuadrática.

b) Reemplazando y simplificando, se obtiene que:

$$\det(J) = 600 \sin(\theta_2)$$

Si el robot intenta alcanzar una posición donde el brazo está completamente estirado ocurre que  $\theta_2 = 0$ , por lo que  $\det(J) = 0$ . La matriz es singular (no tiene inversa). El método falla (división por cero). Físicamente es una singularidad (perdida de grado de libertad en el límite del espacio de trabajo).



## PROBLEMA 2

En el laboratorio de Máquinas Eléctricas, se está caracterizando el núcleo ferromagnético de un nuevo transformador de potencia. Se sabe que la relación entre la densidad de flujo magnético  $B$  (en Teslas) y la intensidad de campo magnético  $H$  (en kA/m) en la zona de saturación no es lineal.

El equipo de ingeniería propone modelar este comportamiento utilizando una variación de la ecuación de Fröhlich-Kennelly dada por:

$$B(H) = \frac{a\sqrt{H}}{1 + b\sqrt{H}}$$

Se han realizado las siguientes mediciones experimentales en el laboratorio:

H (kA/m)	1	4	9
B (Tesla)	0.5	0.8	0.9

Se solicita:

- (1.5 P)** Aplicando el método de ajuste por mínimos cuadrados mediante una linealización adecuada de la ecuación propuesta, determine los valores numéricos de los parámetros  $a$  y  $b$ .
- (1.0 P)** Calcule el coeficiente de determinación (regresión)  $R^2$  para evaluar la bondad del ajuste del modelo linealizado respecto a los datos experimentales transformados.
- (0.5 P)** Utilizando el modelo de Fröhlich-Kennelly, estime ¿cuál será la densidad de flujo magnético  $B$  si se aplica una intensidad de campo de  $H = 6.25$  kA/m.?
- (1.0 P)** Explique físicamente qué representa el valor de la relación  $a/b$  en el límite cuando la intensidad de campo  $H \rightarrow \infty$ . ¿Cómo se relaciona este valor límite con el concepto de diseño de máquinas eléctricas?



### Solución

- a) Determinación de a y b  
Linealización:

$$1/B = b/a + (1/a)(1/\sqrt{H})$$

Definiciones:

$$Y = 1/B$$
$$X = 1/\sqrt{H}$$

Se obtiene un modelo lineal:

$$Y = A + B \cdot X \text{ con } A = b/a \text{ y } B = 1/a$$

Transformación de datos:

H	B	$X = 1/\sqrt{H}$	$Y = 1/B$
1.0	0.50	1.000	2.000
4.0	0.80	0.500	1.250
9.0	0.90	0.333	1.111

$$\Sigma X = 1.833$$
$$\Sigma Y = 4.361$$
$$\Sigma X^2 = 1.361$$
$$\Sigma XY = 2.995$$

Regresión lineal:

Pendiente:  $B = 1.371$

Intercepto:  $A = 0.616$

Parámetros originales:

$$a = 1/B = 0.729$$
$$b = A \cdot a = 0.449$$

- b) Cálculo del coeficiente  $R^2$   
Resultado:  $R^2 = 0.9906(99.06\%)$   
c) Predicción para  $H = 6.25\text{kA/m}$   
 $B(6.25) = 0.859$  Tesla  
d) Significado físico de a/b  
 $a/b = 1.624$  Tesla

Interpretación

Representa la saturación magnética del núcleo ( $B_{\text{sat}}=1.624$ ), que es el límite físico máximo para conducir magnetismo. Una vez alcanzado, aumentar la corriente no genera más flujo magnético útil, y operar por encima de este punto es ineficiente ya que la energía se disipa como calor en forma de trabajo útil.



**PROBLEMA 3**

En una compuerta vertical, la presión de un líquido aumenta con la profundidad según:

$$p(y) = \rho g y$$

Para una compuerta con forma de un cuarto de círculo de radio R, la fuerza total ejercida por el fluido es:

$$F = \int_0^R p(y)b(y)dy$$

Donde:

$$b(y) = \sqrt{R^2 - y^2}, \text{ es el ancho de la compuerta en cada altura}$$

$$dA = b(y)dy$$

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}, g = 9.81 \text{ m/s}^2, R = 2\text{m}$$

- (1.5 P)** Aproxime la fuerza usando la regla de Simpson 1/3 con n=4.
- (1.5 P)** Aproxime la fuerza usando la cuadratura de Gauss con 3 puntos.
- (1.0 P)** Si el valor exacto de la fuerza es:  $F = \frac{\rho g R^3}{3}$ , Calcule el porcentaje error relativo en los incisos a) y b) e indique qué método fue más eficiente.

**Solución**

**a) Simpson 1/3 con n=4**

- Intervalo [0,2],  $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$
- Integrano la función

$$f(y) = \rho g y \sqrt{R^2 - y^2}$$

Evaluada en y = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0

i	y	f(y)
0	0	0
1	0.5	9498.49166
2	1.0	16991.4184
3	1.5	19466.1153
4	2.0	0

$$F_{Simpson} = \frac{h}{3} (f_0 + f_4 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2)$$

$$F_{Simpson} \approx 24973.5441 \text{ N}$$



**b) Cuadratura de Gauss-Legendre con 3 puntos**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} z_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

$$a = 0; b = 2; w_1 = w_3 = \frac{5}{9}; w_2 = \frac{8}{9}; -z_1 = z_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}; z_2 = 0$$

$$F_{Gauss} = w_1 f(z_1 + 1) + w_2 f(z_2 + 1) + w_3 f(z_3 + 1)$$

$$F_{Gauss} = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) + \frac{8}{9} f(0 + 1) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)$$

$$F_{Gauss} = \frac{5}{9} f(0.225403) + \frac{8}{9} f(1) + \frac{5}{9} f(1.774596)$$

$$F_{Gauss} = 26465.6920 \text{ N}$$

**c) Valor exacto y error**

$$F_{exacta} = \frac{\rho g R^3}{3} = \frac{1000 * 9.81 * 8}{3} = 26160 \text{ N}$$

Error para Simpson:

$$\text{Error absoluto} = |26160 - 24973.5441| = 1186.4559 \text{ N}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{1186.4559}{26160} = 4.54 \%$$

Error para Gauss:

$$\text{Error absoluto} = |26160 - 26465.6920| = 305.692 \text{ N}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{305.692}{26160} = 1.17 \%$$

**Comparación:**

Se observa que Gauss fue más eficiente en precisión con menos evaluaciones de función (3 vs 5 evaluaciones de Simpson)



**PROBLEMA 4**

Considere la ecuación diferencial no lineal que describe el movimiento amortiguado de un eje rotacional:

$$\theta''(t) + 0.4 \theta'(t) + \sin(\theta(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Las condiciones de frontera son:

$$\theta(0) = 0.2, \quad \theta(2) = 0.8$$

La velocidad inicial  $\theta'(0)$  es desconocida y se denota por  $s$ .

a) **(1.5 P)** Use la definición  $x_1 = \theta, x_2 = \theta'$  para escribir el sistema de primer orden

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

a.1) Explique por qué, al ser  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$ , el problema de valor inicial tiene solución única para cada valor de  $s$ .

a.1) Definir variables de estado

Tomamos:  $x_1 = \theta(t), x_2 = \theta'(t) = s$ .

En forma vectorial:  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' =$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -0.4x_2 - \sin(x_1) \end{bmatrix}.$$

¿Por qué hay solución única para cada  $s$  ?

La función  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es continua en  $(t, \mathbf{x})$  y diferenciable respecto de  $\mathbf{x}$ , con jacobiano

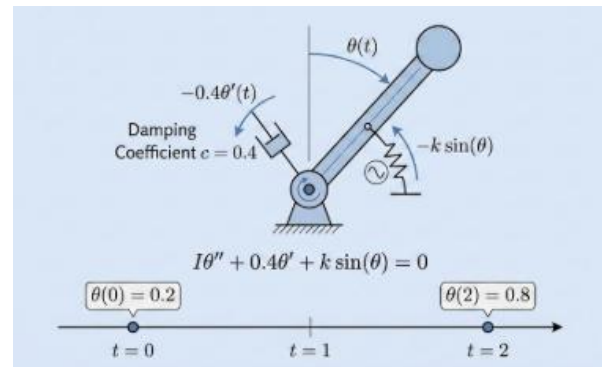
$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.4 \end{bmatrix}$ , en cualquier región acotada de  $(x_1, x_2)$ ,  $\cos(x_1)$  está acotada  $\Rightarrow$  las entradas del jacobiano están acotadas  $\Rightarrow \mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$ . Por el teorema de existencia y unicidad, para cada valor de  $s$  el problema de valor inicial  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ s \end{bmatrix}$ , tiene una solución única (al menos en un intervalo alrededor de  $t = 0$ , y de hecho en  $[0, 2]$  porque el campo es regular).

a.2) Indique cuál es el objetivo del método del disparo utilizando el **residuo**:

$$R(s) = \theta(2; s) - 0.8$$

El objetivo del método del disparo es encontrar un valor

$s^*$  tal que  $R(s^*) = 0$ , es decir,  $\theta(2; s^*) = 0.8$ , es decir alcance el blanco.





b) **(1.5 P)** Para el valor tentativo  $s_0 = 1.0$ , escriba el problema de valor inicial asociado.

Complete la siguiente tabla usando el método de Runge–Kutta de segundo orden (RK2) (Heun) para este sistema (considere 4 pasos) y obtenga el valor aproximado para  $\theta(2; s_0)$ .

Complete los espacios en blanco de la siguiente tabla, considerando 6 cifras decimales.

$t_n$	$(x_{1n}; x_{2n})$	$k_1 = f(t_n, x_n)$	$k_2 = f(t_n+h, x_n + h \cdot k_1)$	$x_{n+1} = x_n + (h/2) \cdot (k_1+k_2)$
0.0	(0.200000, 1.000000)	(1.000000, -0.598669)	(0.700665, -0.924484)	(0.625166, 0.619212)
0.5	(0.625166, 0.619212)	(0.619212, -0.832917)	(0.202753, -0.885565)	(0.830658, 0.189591)
1.0	(0.830658, 0.189591)	(0.189591, -0.814211)	(-0.217515, -0.711888)	(0.823677, -0.191934)
1.5	(0.823677, -0.191934)	(-0.191934, -0.656876)	(-0.520371, -0.457013)	(0.645601, -0.470406)

$$f(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -0.4x_2 - \sin(x_1) \end{bmatrix}. \text{ problema de valor inicial: } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ s_0 = 1 \end{bmatrix},$$

c) **(1.0 P)** Después de integrar numéricamente el sistema con dos valores tentativos de la pendiente inicial, se obtiene:

$$\theta(2; s_0 = 1.0) \approx \text{aprox. Obtenida en b), y } \theta(2; s_1 = 1.3) \approx 0.91.$$

c. 1) Calcule los residuos  $R(s_0)$  y  $R(s_1)$ .

El valor importante para el método del disparo es:  $\theta(2; s = 1.0) \approx 0.65$

$$\text{Sustituyendo: } s_0 = 1.0, R(s_0) = -0.15$$

$$s_1 = 1.3, R(s_1) = +0.11$$



c.2) Use el método de la secante para obtener un valor mejorado  $s_2$ .

Fórmula: 
$$s_2 = s_1 - R(s_1) \frac{s_1 - s_0}{R(s_1) - R(s_0)}$$

Redondeando a tres cifras decimales:  $s_2 \approx 1.173 \text{ rad/s}$ .

c.3) Como referencia adicional, una simulación fina con ode45 da  $s^* \approx 1.151088$ .

Calcule el error absoluto  $e = |s_2 - s^*|$  y comente si la aproximación es adecuada.

Comparación con el valor de referencia  $s^* \approx 1.151088$

Error absoluto:  $e = |s_2 - s^*| \approx |1.173 - 1.151088| \approx 0.022 \text{ rad/s}$ .

El error absoluto es  $e \approx 0.022 \text{ rad/s}$ , que es pequeño comparado con el intervalo inicial  $[1.0, 1.3]$ . Con una sola iteración de la secante a partir de dos disparos bastante gruesos se obtiene una pendiente inicial razonablemente cercana a  $s^*$ ; la aproximación es adecuada y puede refinarse con más iteraciones.