UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

P.A.: 2025-2
Fecha: 17/10/25
Hora Inicio: 14:00
Hora Fin: 15:50

EXAMEN PARCIAL DE

"*MÉTODOS NUMÉRICOS* (M*B536*)"

Coordinador del curso: Mg. Ing. Rosa Garrido Juárez

Responsable de la Elaboración del Examen: Mg. Ing. Robert Castro Salguero

NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL CUADERNILLO MARCAS (TEXTOS O SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO**.

INDICACIONES

1. **Duración del examen**: 110 minutos.

2. **Verificación inicial:** Antes de comenzar, **revise que el puntaje total del examen sume 20 puntos**. Si encuentras alguna inconsistencia, comunícalo de inmediato al docente supervisor.

3. **Material permitido:** Se permite el uso de hasta **2 hojas tamaño A4** solamente con fórmulas (formulario personal). Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet**.

4. **Prohibiciones:** Está estrictamente prohibido el uso de **celulares**, **medios de comunicación electrónica** y **calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth**.

5. **Presentación de respuestas:** Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. **(1.0P)** Sea un sistema de punto flotante basado en la norma IEEE-754, que consta de 10 bits de los cuales 5 corresponden a la mantisa. Determine el error relativo porcentual que se incurre al almacenar en dicho sistema el número x=-224.25. Comente sus resultados.

   Solución

   Estructura S E1 E2 E3 E4 m1 m2 m3 m4 m5

   Convirtiendo a binario:

   $x=-224.25=-11100000.01_2$

   Normalizando:

   $Fl(x)=(-1)^{(1)}*(1.11000)*2^7$

   Bias=2^(k-1)-1=7, siendo k=4 bits del exponente

   Ei=7+7=14=1110

   Almacenamiento: 1 1110 11000

   Número de máquina en decimal: $Fl(x)=-(1+2^{-1}+2^{-2})*2^7=-224$

   Err_rel=abs(x-fl(x))/abs(x)*100=0.111%

   El sistema indicado es poco exacto, en cuanto a precisión y rango, por lo que presentará errores apreciables como en este caso.

2. **(1.0P)** Completar los espacios en blanco de la siguiente función en MATLAB con respecto a la **convergencia del método de Jacobi**.

```
% convergeJ.m
% flag = 1  → Jacobi convergente
% flag = 0  → Jacobi divergente

function [flag] = convergeJ(__A_)

    D = _diag(diag(A))____;
    L = -tril(A,-1);
    U = -triu(A,1);

    Tj = inv(D)*(L+U)____;
    rho = max(abs(eig(Tj)));

    if rho<1
        flag = 1;
    else
        flag = 0;
    end
end
```

3. **(1.0P)** Complete los espacios en blanco, en el siguiente script de Matlab:

```
% Definir la matriz A
A = [4 -2 -1;    -2  4 -2;   1 -2  3];  % Este es un ejemplo
% === ESPECTRO ===
% Usa eig con DOS salidas:
%  - salida 1: matriz cuyas columnas son vectores propios de A
%   - salida 2: matriz diagonal con los valores propios en su
diagonal

[Q, D] = eig(_A___);
% Extraer los valores propios desde la matriz diagonal devuelta
por eig
% (Pista: usa la función que toma la diagonal de una matriz)

eigenvalues = __diag_(__D__);     % eig(A)
% === DISCOS DE GERSHGORIN ===
% n: tamaño de la matriz (número de filas de A)

n = size(_A_, 1);
% 'disks' tendrá [centro, radio] por fila (por eso n x 2)

disks = zeros(_n_, 2);
for i = 1:n
    center = A(i, i);
  % Radio: suma de las magnitudes en la fila i EXCLUYENDO el
término diagonal

    radius = sum(abs(A(i, _:_))) - abs(A(i, i));
    disks(i, :) = [center, radius];
end
% === TRAZADO ===
% Para parametrizar el círculo usa funciones trigonométricas
theta = linspace(0, 2*pi);
figure; hold on;
for i = 1:n

    x = disks(i, 1) + disks(i, 2) * cos(theta);

    y = disks(i, 2) * _sin (theta);
    plot(x, y, 'LineWidth', 1.25, 'DisplayName', sprintf('Disco
%d', i));
end
% Marcar los valores propios (parte real vs parte imaginaria)
plot(real(eigenvalues), imag(eigenvalues), 'ro', 'MarkerSize', 8,
...
     'DisplayName', 'Valores propios');
% Configuración del gráfico
axis equal; grid on;
xlabel('Parte Real'); ylabel('Parte Imaginaria');
title('Discos de Gershgorin y Valores Propios');
legend('Location', 'best'); hold off;
```

4. (1.0P) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$, utilice el criterio de convergencia de Fourier ($f(x_0).\ f''(x_0) > 0$) para predecir si el método de Newton-Raphson convergerá de forma estable o presentará problemas para los siguientes puntos iniciales.

Justifique su respuesta para cada caso con el cálculo del signo del producto.

a) Punto inicial $x_0 = -2$
b) Punto inicial $x_0 = 0$

Solución

Para $f(x) = x^3 - 2x + 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2, f''(x) = 6x$$

a) $x_0 = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 2 = -8 + 4 + 2 = -2, f''(-2) = 6(-2) = -12.$$

Producto:

$$f(-2)f''(-2) = (-2)(-12) = +24 > 0$$

Predicción: Converge de forma estable (el criterio de Fourier se cumple).

b) $x_0 = 0$

$$f(0) = 2, f''(0) = 0$$

Producto:

$$f(0)f''(0) = 2 \cdot 0 = 0(\text{no} > 0)$$

Predicción: El criterio no garantiza convergencia (caso inconcluso). Puede comportarse mal u oscilar; al estar en un punto con curvatura nula (punto de inflexión), la señal del criterio se pierde.

4. PARTE II

Problema 1

Un alambre se enrolla en espiral compacto en forma de un disco circular. Sabiendo que ***I*** es la corriente que circula por el alambre y ***n*** es el número de vueltas por unidad de longitud y ***b*** el radio del disco. La inducción magnética ***B*** medido en Teslas producida en un punto situado a una distancia ***d*** del centro se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$B = \frac{\mu_0\, n\, I}{2}\left[Ln\left(\frac{(d^2+b^2)^{1/2}}{d}+\frac{b}{d}\right)-\frac{b}{(d^2+b^2)^{1/2}}\right]$$

Si $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \pm 1\%$

n=200$\pm$2 vueltas/metro

b=0.5 m. (sin error)

$25.115 \le I \le 25.125$ Amperios.

d=1.25 m. (sin error)

Usando propagación de errores multivariable:

a) **(2.0 P)** Estime B y su máximo error absoluto y relativo.
b) **(1.0 P)** Estime el rango de variación de B. Comente sus respuestas.
c) **(1.0 P)** Según lo obtenido en a), que valor aproximado tomaría la variable B en sus futuros cálculos. Considere que debe tomar todas sus cifras significativas exactas, incluya redondeo si es necesario.

Solución

a)

$$\varepsilon\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} * \frac{1}{100}$$

$$\varepsilon n = 2$$

$$I = 25.12$$

$$\varepsilon I = 0.5 * 10^{-2}$$

$$\varepsilon B \cong \left|\frac{\partial B}{\partial \mu_0}\right| \varepsilon\mu_0 + \left|\frac{\partial B}{\partial n}\right| \varepsilon n + \left|\frac{\partial B}{\partial I}\right| \varepsilon I$$

$$\left|\frac{\partial B}{\partial \mu_0}\right| = 46.8353 \qquad \left|\frac{\partial B}{\partial n}\right| = 2.9428 * 10^{-7} \qquad \left|\frac{\partial B}{\partial I}\right| = 2.3430 * 10^{-6}$$

$$\varepsilon B \cong 1.1888 * 10^{-6}$$

$$\mathrm{B} \cong 5.8855 * 10^{-5}$$

$$\delta B \cong 2.02\%$$

b)

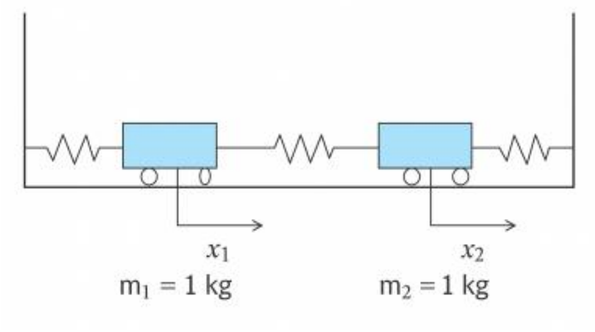
Bϵ[0.578 0.600] $* 10^{-4}$

El error de 2% es aceptable, pero se podría mejorar reduciendo el error de las variables y considerando el error de las variables no consideradas.

a) Error $\delta B * \cong 2 * 10^{-2} \leq 5 * 10^{-n}$
   n=2 cifras significativas exactas (considerando redondeo)
   B$\approx 0.59 * 10^{-4}$

Problema 2

Dos masas iguales $m_1 = m_2 = 1$ kg están unidas por tres resortes según el esquema:



Los resortes tienen rigideces: $k_1 = k_2 = k_3 = 5\ \mathrm{N/m}$.

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ el desplazamiento de cada masa respecto a su posición de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton para cada masa:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 + k_2(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Como $m_1 = m_2 = 1$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Buscando soluciones armónicas $x(t) = V\cos(\omega t)$, resulta:

$$AV = \omega^2 V,\ \ A = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Se desea estimar la frecuencia natural dominante (asociada al mayor autovalor) aplicando el método de la potencia.

a) **(1 P)** Explique el criterio teórico de convergencia del método de la potencia en función de la razón espectral $\rho = |\lambda_2/\lambda_1|$ y de la orientación del vector inicial V_0 respecto a los modos propios del sistema.

b) **(2 P)** Aplique dos iteraciones del método de la potencia en cada caso, usando los vectores iniciales:

caso 1: $V_{01} = [1\ \ -0.5]^T$

caso 2: $V_{02} = [1\ \ 0.9]^T$

Estime el autovalor con el cociente de Rayleigh: $\tilde{\lambda} = (V^t A V) / (V^t V)$.

Determine cuál de los dos vectores iniciales permite una convergencia más rápida hacia el autovalor dominante.

c) **(1 P)** Con el mejor resultado obtenido, estime la frecuencia natural dominante del sistema $f = \sqrt{\tilde{\lambda}}/(2\pi)$. Explique brevemente, con interpretación física, por qué la elección de V_0 afecta la rapidez de la convergencia.

Solución

a) Sea A con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots$ y autovectores $v_1, v_2, \ldots$. La iteración normalizada

$$V_{k+1} = \frac{AV_k}{\|AV_k\|}, \qquad \hat{\lambda}_k = \frac{V_k^\top AV_k}{V_k^\top V_k}$$

converge al auto vector dominante v_1 y al autovalor λ_1 si y solo si:

1. Existe un autovalor de mayor módulo único $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.
2. El vector inicial no es ortogonal al modo dominante: $V_0 = \sum_i c_i v_i$ con $c_1 \neq 0$

Con esas condiciones, al descomponer V_0 en la base propia, luego de k iteraciones:

$$\frac{V_k}{\|V_k\|} = v_1 + \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \frac{c_2}{c_1}}_{\text{término que se atenúa}} v_2 + \cdots$$

y el error decrece linealmente con tasa asintótica

$$\rho = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

Además, la orientación de V_0 fija el prefactor: cuanto menor es $|c_2/c_1|$ (mejor alineado con v_1), menos iteraciones se necesitan. Si V_0 es (casi) paralelo a un modo subdominante, la convergencia será (muy) lenta; si $V_0 \perp v_1$ (i.e., $c_1 = 0$), el método falla (no alcanza el dominante).

Razón espectral:

$$\rho = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \frac{1}{3} < 1/2$$

Autovalores: $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 5$. Si $\rho < 1/2$ Si existe dominancia.

Vectores propios: $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b)

Vector inicial	$\hat{\lambda}$ (2 iteraciones)	Comentario
$V_0^{(1)} = [1 - 0.5]^\mathrm{T}$	14.986	Converge rápido, alineado con V_1.
$V_0^{(2)} = [1 \quad 0.9]^\mathrm{T}$	6.833	Converge lento, casi paralelo a V_2.

c) Frecuencia dominante:

$$\omega = \sqrt{14.986} = 3.87\text{rad/s}, f = \frac{3.87}{2\pi} = 0.616 \text{ Hz}$$

La razón teórica de convergencia $\rho = 1/3$ concuerda con el comportamiento observado: el caso alineado con V_1 converge rápido, mientras que el caso mal orientado requiere muchas iteraciones para alcanzar el mismo nivel de precisión.

Problema 3

La solución de sistemas de ecuaciones lineales es fundamental en el análisis de circuitos DC y AC en estado estacionario. A partir del circuito de la Figura 1 (tres mallas I_1, I_2, I_3 con resistencias $R_1, \dots, R_6$, incluyendo una resistencia vertical común R_5 entre las mallas superiores y una rama inferior con R_4), se requiere determinar las corrientes de malla.

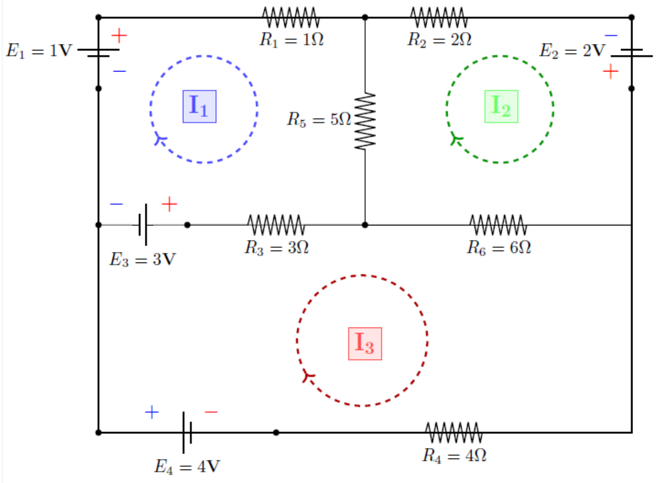


Figura 1 Circuito Eléctrico

Condiciones del problema:

$$R_i = i\,\Omega \ \ (i = 1, \dots, 6), \qquad E_i = i \ \ \mathrm{V}\ (i = 1, \dots, 4),$$

con polaridades y sentidos de malla horarios como en el diagrama.

a) **(1P)** Formule el sistema lineal $A * I = V$ usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff aplicado al **circuito eléctrico**.

<u>Ayuda</u>: (Malla 1)

$$(R_1 + R_5 + R_3)I_1 - R_5 I_2 - R_3 I_3 - E_1 + E_3 = 0 \ \Rightarrow\ 9I_1 - 5I_2 - 3I_3 = -2$$

(Use la misma estructura para las mallas 2 y 3).

b) **(1.5P)** Resuelva el sistema de ecuaciones lineales con eliminación gaussiana. Muestre:

- La matriz aumentada $[A \mid V]$ inicial.
- Los pasos principales de la eliminación: Matriz triangular superior y sustitución inversa.
- El vector solución $I = [I_1, I_2, I_3]^T$.

c) **(1.5P)** Analice la convergencia y aplique el método de Gauss-Seidel considerando un punto semilla $I^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.93 \\ 1.12 \end{bmatrix}$,

y una tolerancia de 10^{-3}. Emplee como criterio de parada el error relativo sucesivo con norma infinita:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty}{\left\| x^{(k+1)} \right\|_\infty} < 10^{-3}.$$

<u>Sugerencia</u>: Utilice el algoritmo de Gauss-Seidel por elementos (forma algebraica).

Solución:

a)

$$
\begin{aligned}
9I_1 - 5I_2 - 3I_3 &= -2,\\
-5I_1 + 13I_2 - 6I_3 &= 2,\\
-3I_1 - 6I_2 + 13I_3 &= 7,
\end{aligned}
$$

b)

Matriz aumentada $[A \mid V]$ inicial

$$
\begin{array}{r}
\mathit{Pivot}\\
m_{21} = -5/9\\
m_{31} = -1/3
\end{array}
\begin{bmatrix} 9 & -5 & -3 & -2\\ -5 & 13 & -6 & 2\\ -3 & -6 & 13 & 7 \end{bmatrix}
\begin{array}{l}
O.F.\\
R_2 \leftarrow R_2 + 5/9R_1\\
R_3 \leftarrow R_3 + 1/3R_1
\end{array}
\begin{bmatrix} 9 & -5 & -3 & -2\\ 0 & 92/9 & -23/3 & 8/9\\ 0 & -23/3 & 12 & 19/3 \end{bmatrix}
$$

Matriz aumentada $[A \mid V]$ inicial

$$
\begin{array}{r}
\\
\text{Pivot}\\
m_{31} = -3/4
\end{array}
\begin{bmatrix} 9 & -5 & -3 & -2\\ 0 & 92/9 & -23/3 & 8/9\\ 0 & -23/3 & 12 & 19/3 \end{bmatrix}
\begin{array}{l}
O.F.\\
\\
R_3 \leftarrow R_3 + 3/4R_2
\end{array}
\begin{bmatrix} 9 & -5 & -3 & -2\\ 0 & 92/9 & -23/3 & 8/9\\ 0 & 0 & 25/4 & 7 \end{bmatrix}
$$

Sustitución hacia atrás

- De la fila 3: $\frac{25}{4}I_3 = 7 \Rightarrow I_3 = \frac{28}{25}$.
- De la fila 2: $\frac{92}{9}I_2 - \frac{23}{3}I_3 = \frac{8}{9} \Rightarrow I_2 = \frac{533}{575}$.
- De la fila 3: $9I_1 - 5I_2 - 3I_3 = -2 \Rightarrow I_1 = \frac{383}{575}$.

Vector solución

$$
I = \begin{bmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3 \end{bmatrix} =\approx \begin{bmatrix} 0.66522\\ 0.92783\\ 1.12000 \end{bmatrix} \text{A.}
$$

c)

La Matriz A es diagonal estrictamente dominante por lo tanto el método de Gauss Seidel es convergente.

Iteración	I_1	I_2	I_3	Error relativo
0	0.650000	0.930000	1.120000	---
1	0.667778	0.927607	1.120690	1.5863×10^{-2}
2	0.666678	0.927503	1.120389	9.8129×10^{-4}

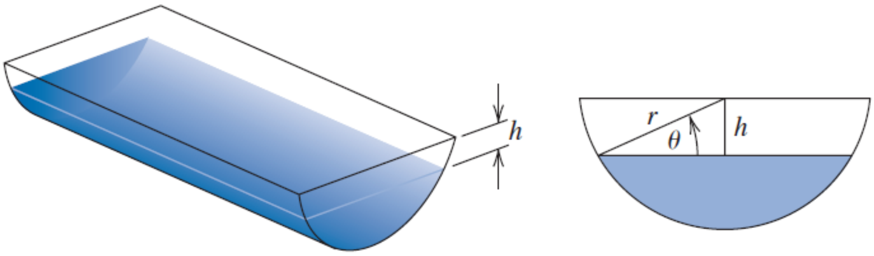
Con $e^{(2)} = 9.8129 \times 10^{-4} < 10^{-3}$, el método alcanza la tolerancia en la iteración 2
.

Problema 4

Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r, según la figura mostrada. Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V del agua es:

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2\, arcsen\left(\frac{h}{r}\right) - h\,(r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

Considere $L = 3\ m$, $r = 0.30\ m$ y $V = 0.35\ m^3$



d) **(1.0 P)** Plantee la ecuación $f(h) = 0$ y localice la solución aplicando el teorema de Bolzano, teniendo en cuenta los siguientes intervalos candidatos: [-0.2,-0.1]; [0, 0.1]; [0.2, 0.3].

e) **(1.0 P)** Realice 02 iteraciones de bisección paso a paso y estime el error en cada iteración, a partir intervalo encontrado en a).
Nota.- Considere las iteraciónes a partir de 0, 1, 2.

f) **(1.5 P)** Aplique Newton-Raphson paso a paso a partir del punto medio del último intervalo obtenido en b) hasta tener una precisión de 0.001. Considerar $f'(h) = \frac{-0.39+2h^2}{\sqrt{0.09- h^2}}$

g) **(0.5 P)** Comente los resultados alcanzados por ambos métodos en términos de la convergencia y precisión obtenida.

Solución

a) Reemplazando los valores

$$f(h) = 0.024705 - 0.09\ arc\ sen\left(\frac{h}{0.30}\right) - h\sqrt{0.09 - h^2}$$

$$f(-0.2) = 0.135101$$
$$f(-0.1) = 0.083574$$
$$f(0) = 0.024705$$
$$f(0.1) = -0.034161$$
$$f(0.2) = -0.085691$$

La raíz se encuentra entre los puntos 0 y 0.1

b)

MÉTODO DE BISECCIÓN

===================

Iter	a	b	c=(a+b)/2	f(c)	Error
0	*0.000000*	*0.100000*	*0.050000*	*-0.005156*	*0.050000*
1	0.000000	0.050000	0.025000	0.009722	0.025000
2	0.025000	0.050000	0.037500	0.002264	0.012500

c)

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

========================

Iter	h_n	f(h_n)	f'(h_n)	h_{n+1}	Error
1	0.037500	0.002264	-1.300828	0.039240	0.001740
2	0.039240	0.001228	-1.300911	0.040184	0.000944

Convergencia alcanzada
Raíz final: h = 0.040184 m
Error final: 0.000944 m

d)

Newton-Raphson demostró superioridad en velocidad y precisión, es una buena estrategia Usar bisección para obtener una aproximación inicial y luego refinar con Newton-Raphson.