



**EXAMEN FINAL
 DE METODOS NUMÉRICOS (MB536)**

Responsable de la elaboración: Mg. Ing. Robert Castro Salguero

APELLIDOS NOMBRES:

CODIGO UNI: SECCION:

NOTA DEL EXAMEN			
	NUMEROS	LETRAS	Firma del Docente

INDICACIONES:

- **Duración del examen:** 110 minutos.
- **Material permitido:** Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet**.
- **Presentación de respuestas:** Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.

PREGUNTA N°01. (1P)

Completar el código MATLAB para resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' = 2x + 3y + 4y' + 5y'' \quad y(0) = 6 \quad y'(0) = 7 \quad y''(0) = 8, \quad x \text{ varía entre } 0 \text{ y } 2$$

% resuelve_edo.mlx

[T, Y]=ode45(_____)

plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'--')

title('Solucion mediante ode45')

xlabel('T')

ylabel('Y')

legend('y1','y2')

% fu1.m

function [u_dot]=fu1(t,u)

u_dot=[_____];



SOLUCION

```
[T, Y]=ode45('fu1',[0 2],[6 7 8])  
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'--')  
title('Solucion mediante ode45')  
xlabel('T')  
ylabel('Y')  
legend('y1','y2')
```

```
% fu1.m  
function [u_dot]=fu1(t,u)  
u_dot=[u(2); u(3); 2*t+3*u(1)+4*u(2)+5*u(3)];
```

PREGUNTA N°02. (1P)

- La cuadratura de Simpson 1/3 es exacta al integrar polinomios de grado 3 o menor
- Cuadratura de Simpson 3/8 es inexacta al integrar polinomios de grado 3 o menor
- Cuadratura de Gauss-Legendre (N=3) es inexacta al integrar polinomios de grado 6 o menor
- Cuadratura de Simpson abierta el número de particiones debe ser múltiplo de 3
- La regla del rectángulo está sujeta a errores de cancelación para funciones trascendentes

Seleccione la alternativa correcta con respecto al valor de verdad de cada afirmación:

- a) VVFFV b) FVFVV c) VVFFF d) FFFVF e) VVFFV

Solución

C)



PREGUNTA N°03. (1P)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$4x^2 - 24x + 9y^2 - 36y + 47 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 2y + 30 = 0$$

Comprobar que las siguientes fórmulas corresponde a esta ecuación y verificar la convergencia del algoritmo de punto fijo, si una de las raíces es cercana a (3,0):

$$x = 4 - \frac{2(y+15)}{9x}$$

$$y = \frac{4x^2 - 24x + 9y^2 + 47}{36}$$

Solución

1. Validación de las Fórmulas de Iteración

Partiendo del sistema original, despejamos para obtener las funciones $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$:

- Para x : De $9x^2 - 36x + 2y + 30 = 0$, despejamos x :

$$9x(x - 4) = -2(y + 15) \implies x = 4 - \frac{2(y + 15)}{9x}$$

- Para y : De $4x^2 - 24x + 9y^2 - 36y + 47 = 0$, despejamos $36y$:

$$36y = 4x^2 - 24x + 9y^2 + 47 \implies y = \frac{4x^2 - 24x + 9y^2 + 47}{36}$$

2. Matriz Jacobiana y Criterio de Convergencia

Calculamos las derivadas parciales de las funciones iterativas $G(x, y) = [g_1, g_2]^T$ evaluadas en el punto inicial (3, 0):

1. Derivadas de g_1 :

- $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{2(y+15)}{9x^2} \xrightarrow{(3,0)} \frac{30}{81} \approx 0.3704$
- $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{2}{9x} \xrightarrow{(3,0)} -\frac{2}{27} \approx -0.0741$

2. Derivadas de g_2 :

- $\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{8x-24}{36} \xrightarrow{(3,0)} \frac{24-24}{36} = 0$
- $\frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{18y}{36} \xrightarrow{(3,0)} \frac{0}{36} = 0$

3. Conclusión de Convergencia

La matriz Jacobiana en el punto dado es:

$$J(3,0) = \begin{pmatrix} 0.3704 & -0.0741 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Criterio de la Norma Infinito ($\|J\|_\infty$):

$$\|J\|_\infty = \max(|0.3704| + |-0.0741|, 0 + 0) = 0.4445$$

Resultado: Como $0.4445 < 1$, el método de punto fijo **garantiza convergencia** hacia la solución partiendo del punto (3, 0).



PREGUNTA N°04. (1P)

Sea la tabla:

X 1 2 4 5

Y 2 1 7 8

A partir del polinomio interpolante de Newton siguiente

$$P(x)=a+b*(x-4)+c*(x-4)*(x-5)+d*(x-4)*(x-5)*(x-1)$$

determine a+b+c+d

Solución

Ordenando la tabla de acuerdo a la estructura del polinomio dado:

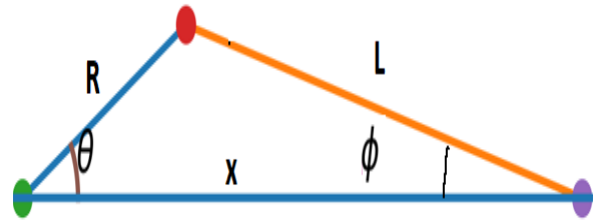
x_i	$f[x_i]$	1ra Dif.	2da Dif.	3ra Dif.
4	7 (a)			
5	8	$\frac{8-7}{5-4} = 1$ (b)		
1	2	$\frac{2-8}{1-5} = 1.5$	$\frac{1.5-1}{1-4} = -1/6$ (c)	
2	1	$\frac{1-2}{2-1} = -1$	$\frac{-1-1.5}{2-5} = 5/6$	$\frac{5/6-(-1/6)}{2-4} = -1/2$ (d)

a+b+c+d=22/3



PROBLEMA 1 (4P)

Un mecanismo de biela-manivela se utiliza en motores de combustión para convertir movimiento circular en lineal. La posición del pistón x y el ángulo de la biela ϕ están relacionados con el ángulo de la manivela θ . Donde $R = 10$ cm (radio de la manivela) y $L = 25$ cm (longitud de la biela). Se desea encontrar los ángulos (θ, ϕ) necesarios para que el pistón se encuentre exactamente a $x = 30$ cm de la base. Se pide:



- (1 P)** Defina el sistema en la forma $F(x) = 0$, donde el vector de incógnitas es $x = [\theta, \phi]^T$. Obtenga la Matriz Jacobiana $J(\theta, \phi)$ de forma analítica.
- (2 P)** Aplique el Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales. Realice dos iteraciones partiendo de la aproximación inicial $x^{(0)} = [1, 0]^T$ radianes. En cada iteración reporte: El vector $F(x^{(k)})$, La matriz Jacobiana $J(x^{(k)})$, El incremento Δx y el error aproximado usando la norma infinita $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}$.
- (1 P)** Demuestre que el determinante del Jacobiano $\det(J) = RL \sin(\theta + \phi)$. ¿Qué ocurre con el método numérico si el mecanismo se encuentra en un "punto muerto" (cuando el brazo está totalmente extendido)? Explique la relación entre la convergencia del método y la estabilidad física del mecanismo en ese punto.

Solución

a) Definición del Sistema y Matriz Jacobiana

Para un mecanismo biela-manivela, las ecuaciones de posición (proyecciones en los ejes horizontal y vertical) son:

- Eje x:** $R \cos(\theta) + L \cos(\phi) = x$
- Eje y:** $R \sin(\theta) - L \sin(\phi) = 0$ (asumiendo ϕ medido hacia abajo como muestra el diagrama).

Definimos el vector de funciones $F(\mathbf{x}) = 0$ con $\mathbf{x} = [\theta, \phi]^T$:

$$F(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R \cos(\theta) + L \cos(\phi) - 30 \\ R \sin(\theta) - L \sin(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana $J(\theta, \phi)$

Se obtiene derivando parcialmente cada función respecto a θ y ϕ :

$$J(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(\theta) & -L \sin(\phi) \\ R \cos(\theta) & -L \cos(\phi) \end{bmatrix}$$



b) Aplicación del Método de Newton-Raphson

La fórmula de iteración es: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}F(\mathbf{x}^{(k)})$.

Usaremos la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0]^T$ (en radianes).

Iteración 1

1. Evaluar $F(\mathbf{x}^{(0)})$:

- $f_1 = 10 \cos(1) + 25 \cos(0) - 30 = 10(0.5403) + 25 - 30 = 0.4030$
- $f_2 = 10 \sin(1) - 25 \sin(0) = 10(0.8414) - 0 = 8.4147$
- $F(\mathbf{x}^{(0)}) = [0.4030, 8.4147]^T$

2. Evaluar $J(\mathbf{x}^{(0)})$:

- $J = \begin{bmatrix} -10 \sin(1) & -25 \sin(0) \\ 10 \cos(1) & -25 \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.4147 & 0 \\ 5.4030 & -25 \end{bmatrix}$

3. Calcular incremento $\Delta \mathbf{x}$ y error:

- Resolvemos $J\Delta \mathbf{x} = -F \implies \Delta \mathbf{x} \approx [0.0479, 0.3469]^T$
- Nuevo \mathbf{x} : $\mathbf{x}^{(1)} = [1.0479, 0.3469]^T$
- Error (norma infinita): $\|\Delta \mathbf{x}\|_{\infty} = 0.3469$

Iteración 2

$\mathbf{x}^{(2)} = [0.8993, 0.3225]$

Err = 0.1485

El error es decreciente por tanto, NR es convergente.



c) Determinante y Punto Muerto

Demostración del Determinante

$$\det(J) = (-R \sin \theta)(-L \cos \phi) - (-L \sin \phi)(R \cos \theta)$$

$$\det(J) = RL \sin \theta \cos \phi + RL \cos \theta \sin \phi$$

Usando la identidad trigonométrica de la suma de ángulos:

$$\det(\mathbf{J}) = \mathbf{RL} \sin(\theta + \phi)$$

Análisis del Punto Muerto

Cuando el brazo está totalmente extendido, los ángulos son tales que $\theta + \phi = \pi$ (o 180°). En este punto:

- $\sin(\theta + \phi) = 0$, por lo tanto, $\det(J) = 0$.
- **Problema numérico:** La matriz Jacobiana se vuelve singular (no invertible). El método de Newton-Raphson falla porque no puede calcular el incremento $\Delta \mathbf{x}$ (división por cero).
- **Estabilidad física:** Representa una singularidad cinemática. En este punto, el mecanismo pierde un grado de libertad instantáneo o no puede transmitir movimiento eficientemente; el esfuerzo para "sacar" al pistón de esa posición tiende al infinito, lo que coincide con la inestabilidad del algoritmo.



PROBLEMA 2 (4P)

En una planta industrial, se bombea esencia de trementina a 60°C desde la base de una columna de fraccionamiento hasta un gran tanque de almacenamiento descubierto. La siguiente tabla muestra el caudal (en litros por hora) que la bomba puede manejar en función de la potencia (en vatios) requerida:

Caudal (l/h)	700	950	1150	1300
Potencia (w)	361.6	370.64	379.68	384.46

- (2.0 Pts)** Determine el polinomio interpolante de Lagrange para aproximar el caudal en función de la potencia que se ajuste a los 4 puntos registrados.
- (1.0 Pts)** Se considera que el proceso es eficiente si, al operar a una potencia de 363 W, el caudal excede los 800 litros por hora. De lo contrario, la bomba requiere mantenimiento. Concluya si la bomba necesita mantenimiento y justifique su respuesta basándose en el resultado obtenido.
- (1.0 Pts)** Halle la razón de cambio instantáneo del caudal mediante diferenciación del polinomio interpolante cuando la potencia es igual a 375 w.

Solución

a) Determinación del Polinomio Interpolante de Lagrange

Para 4 puntos, el polinomio es de grado 3 ($n = 3$). La fórmula general es $L(P) = \sum_{i=0}^3 C_i \cdot l_i(P)$.

1. Coeficientes de Lagrange (l_i):

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad l_0(P) &: \frac{(P-370.64)(P-379.68)(P-384.46)}{(361.6-370.64)(361.6-379.68)(361.6-384.46)} = \frac{(P-370.64)(P-379.68)(P-384.46)}{-3732.12} \\
 \bullet \quad l_1(P) &: \frac{(P-361.6)(P-379.68)(P-384.46)}{(370.64-361.6)(370.64-379.68)(370.64-384.46)} = \frac{(P-361.6)(P-379.68)(P-384.46)}{1124.93} \\
 \bullet \quad l_2(P) &: \frac{(P-361.6)(P-370.64)(P-384.46)}{(379.68-361.6)(379.68-370.64)(379.68-384.46)} = \frac{(P-361.6)(P-370.64)(P-384.46)}{-774.23} \\
 \bullet \quad l_3(P) &: \frac{(P-361.6)(P-370.64)(P-379.68)}{(384.46-361.6)(384.46-370.64)(384.46-379.68)} = \frac{(P-361.6)(P-370.64)(P-379.68)}{1513.19}
 \end{aligned}$$

Simplificando, para mayor comodidad:

$$C(P) = 0.0427 \cdot P^3 - 47.7660 \cdot P^2 + 1.7839 \cdot 10^4 \cdot P - 2.2223 \cdot 10^6$$

b) $C(363) = 749.6039$ l/h

Puesto que es menor que 800 l/h, el caudal no excede el mínimo requerido. Por lo tanto la bomba requiere mantenimiento.

c) Razón de Cambio:

$$C'(P) = 0.128 \cdot P^2 - 95.5319 \cdot P + 1.7839 \cdot 10^4$$

$$C'(375) = 21.1678 \text{ l/h por cada Watt de potencia}$$



PROBLEMA 3 (4P)

El voltaje en un capacitor ideal está dado por:

$$V(t) = (1/C) \int_0^t I(\tau) d\tau,$$

donde $C = 50 \mu F$ e $I(t)$ es la corriente de carga. Se han registrado experimentalmente los siguientes valores:

$t(s)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$I(\mu A)$	25.00	19.47	15.16	11.81	9.20	7.16	5.58	4.34	3.38

Se desea estimar el voltaje en el capacitor a los 40 s, es decir $V(40)$.

- a) **(1.5P)** Aproxime la integral usando la **regla compuesta del punto medio**, considerando: un solo rectángulo, dos rectángulos y cuatro rectángulos. Calcule $V(40)$ en cada caso y muestre claramente el procedimiento.
- b) **(1.5P)** Aproxime la integral aplicando la cuadratura de Gauss–Legendre de 2 puntos. Como los puntos de evaluación no coinciden con los datos tabulados, estime $I(t)$ mediante interpolación lineal. Luego calcule $V(40)$.
- c) **(1.0P)** A partir de un ajuste spline cúbico natural de los datos y su integración exacta en $[0,40]$, se obtiene como valor de referencia: $V_{ref}(40) = 8.653$ V. Compare sus resultados del ítem a) y b) con este valor y responda:
 ¿Cómo varía el error al refinar la partición en el método del punto medio?
 ¿Como influye la aproximación de GL2 con respecto a considerar una interpolación lineal?

Solución

Datos: $C = 50 \mu F$.

$t(s)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$I(\mu A)$	25.00	19.47	15.16	11.81	9.20	7.16	5.58	4.34	3.38

Objetivo: estimar

$$V(40) = (1/C) \int_0^{40} I(t) dt.$$

Nota de unidades: $\mu A \cdot s = \mu C$, y $V = Q/C \Rightarrow$ numéricamente

$$V(40)[V] = (\int I dt [\mu A \cdot s]) / 50.$$

a) Regla compuesta del punto medio **(1.5 pts)**

Regla del punto medio compuesta en $[0,40]$:

Caso 1: un rectangulo ($m=1, n=2, h=20$). Punto medio $t^*=20$ s $\Rightarrow I(20)=9.20 \mu A$.

$$\int \approx 40 \cdot 9.20 = 368.0 \mu A \cdot s \Rightarrow V(40) \approx 368.0/50 = \mathbf{7.36V}.$$

Caso 2: dos subintervalos ($m=2, n=4, h=10$). Puntos medios: 10 s y 30 s.

$$I(10) = 15.16 \mu A, \quad I(30) = 5.58 \mu A.$$

$$\int \approx 20 \cdot (15.16 + 5.58) = 20 \cdot 20.74 = 414.8 \mu A \cdot s \Rightarrow V(40) \approx 414.8/50 = \mathbf{8.296V}.$$

Caso 3: cuatro subintervalos ($m=4, n=8, h=5$). Puntos medios: 5, 15, 25 y 35 s.

$$I(5) = 19.47, \quad I(15) = 11.81, \quad I(25) = 7.16, \quad I(35) = 4.34(\mu A).$$



$$\int \approx 10 \cdot 42.78 = 427.8 \mu A \cdot s \Rightarrow V(40) \approx 427.8/50 = 8.556V.$$

b) Gauss–Legendre 2 puntos en forma compuesta (1.5 pts)

Transformamos del intervalo $[-1,1]$ al intervalo de tiempo del problema $[0,40]$.

- $t = 20z + 20$

Calculamos los tiempos reales (t) donde debemos medir la corriente:

- $t_1 = 20(-0.57735) + 20 \approx 8.453$ segundos.
- $t_2 = 20(0.57735) + 20 \approx 31.547$ segundos.

Interpolando linealmente obtenemos:

$$I(t_1 = 8.453) = 16.4935, I(t_2 = 31.547) = 5.1963$$

$$V(10) \approx 1/C \int_0^{40} I(t)dt \approx 1/C20 \cdot [(1 \cdot I(t_1)) + (1 \cdot I(t_2))] = 8.6798V$$

c) Comparación con el valor de referencia y análisis (1.0 pto)

Valor de referencia para comparar: $V_{ref}(40) = 8.65316 V$

Tabla de comparación (errores respecto a V_{ref}):

Método	V(40) [V]	$ \Delta V $ [V]	Error relativo [%]
Punto medio – 1 subintervalo (h=40 s)	7.3600	1.2932	14.944
Punto medio – 2 subintervalos (h=20 s)	8.2960	0.3572	4.128
Punto medio – 4 subintervalos (h=10 s)	8.5560	0.0972	1.123
GL-2	8.6798	0.0266	0.308
Referencia (spline suave integrado)	8.6532	0.0000	0.000

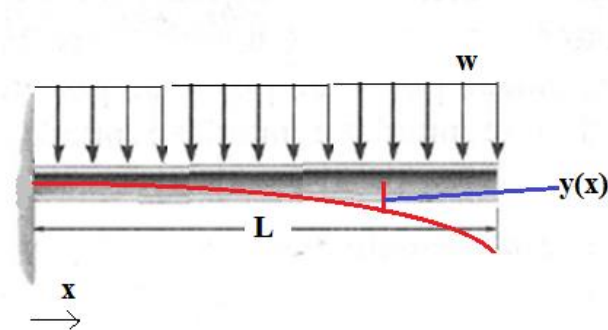
Comentarios esperados:

- Punto medio: al refinar la partición, el error disminuye (convergencia típica $O(h^2)$).
- GL-2: tiene mayor orden de exactitud que Newton–Cotes de bajo orden; sin embargo, si $I(t)$ se aproxima linealmente, el error total puede quedar dominado por la aproximación de la función.
- Spline vs lineal: el spline provee suavidad (derivadas continuas) y suele mejorar la evaluación en nodos internos; la lineal es estable pero menos precisa. Con datos suaves y monótonos, el spline es superior.



PROBLEMA 4 (4P)

Una viga de longitud $L=1$ m., empotrada en el extremo izquierdo (deflexión y pendiente nula) está sometida a una carga distribuida uniforme de $w=500$ N/m., como se observa en la siguiente figura:



Si $E=10$ Giga-Pascales es el módulo de elasticidad del material e $I=10^{-5}$ m⁴ es el momento de inercia de la sección transversal. Además, el momento flector obedece a la siguiente relación:
 $M(x) = -250(1-x)^2$

También se sabe por resistencia de materiales que la deflexión $y(x)$ puede ser obtenida al resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

- (1.0 Pts.)** Determine la deflexión para $x=0.25, 0.5, 0.75$ y 1 , usando del método de Euler ($h=0.25$). Muestre el primer paso detalladamente.
- (2.0 Pts.)** Determine la deflexión para $x=0.25, 0.5, 0.75$ y 1 , usando del método de Runge-Kutta de orden 2 ($h=0.25$). Muestre los 2 primeros pasos detalladamente.
- (1.0 Pts.)** Determine la máxima pendiente y máxima deflexión en magnitud de la viga y su ubicación y el error relativo porcentual de b) si la solución analítica es:

$$y(x) = -\frac{x^4}{4800} + \frac{x^3}{1200} - \frac{x^2}{800}, \text{ y comente sus resultados.}$$



Solución

Algoritmo de Euler para este caso:

$$y' = z$$

$$z' = -0.0025 \cdot (1-x)^2$$

$$h = 0.25$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = 0$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i$$

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot (-0.0025 \cdot (1-x_i)^2)$$

a) Método de Euler ($h = 0.25$)

Usamos: $y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i$ y $z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i)$.

i	x_i	$f(x_i)$	z_i (Pendiente)	y_i (Deflexión m)
0	0.00	-0.002500	0.000000	0.000000
1	0.25	-0.001406	-0.000625	0.000000
2	0.50	-0.000625	-0.000977	-0.000156
3	0.75	-0.000156	-0.001133	-0.000400
4	1.00	0.000000	-0.001172	-0.000684



b)
Algoritmo de Runge-Kutta 2 para este caso:

$$\begin{aligned}y' &= z \\ z' &= -0.0025(1-x)^2 \\ h &= 0.25 \\ x_0 &= 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = 0 \\ x_{i+1} &= x_i + h \\ k_1 &= h * z_i \\ l_1 &= h * (-0.0025 * (1-x_i)^2) \\ k_2 &= h * (z_i + l_1) \\ l_2 &= h * (-0.0025 * (1-(x_i+h))^2) \\ y_{i+1} &= y_i + 1/2 * (k_1 + k_2) \\ z_{i+1} &= z_i + 1/2 * (l_1 + l_2)\end{aligned}$$

x	y	z=y'
0	0	0
0.25	-0.000078125000	-0.00048828125
0.50	-0.000244140625	-0.00074218750
0.75	-0.000449218750	-0.00083984375
1.00	-0.000664062500	-0.00085937500

Deflexión máxima exacta: $y(1) = -0.000625$ (err=6.25%)